Hochschule Wismar   Gottlob Frege Centre

Dieter Schott

Das Mathematik-Abitur
von
Gottlob Frege

Heft 01 / 2020

Wismarer Frege-Reihe   Wismar Frege Series

Das **Gottlob-Frege-Zentrum** wurde am 7.11. 2000 an der Hochschule Wismar gegründet. Seine Mitglieder setzen sich für eine wissenschaftlich begründete, praxisorientierte, moderne und international ausgerichtete Ausbildung in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Grundlagendisziplinen ein.

Weitere Informationen zum Gottlob-Frege-Zentrum finden Sie auf der Netz-Seite

http://www.hs-wismar.de/frege

ISSN 1862-1767

Printed in Germany

Inhalt

Dieter Schott

Das Mathematikabitur von Gottlob Frege
Aufgaben, Lösungen, Kommentare

Dieter Schott

Das Mathematik-Abitur von Gottlob Frege

Zusammenfassung: Die Mathematik-Aufgaben, die Gottlob Frege und seinen Mitschülern im Jahre 1869 bei ihrer Maturitätsprüfung (Abitur) gestellt wurden, werden analysiert. Die von Frege gelösten Aufgaben werden vorgestellt und kommentiert. Die übrigen Aufgaben werden ebenfalls gelöst. Dabei wird auf verschiedene Lösungswege hingewiesen. Zusätzliche Erläuterungen und Beispiele sollen zu neuen Einsichten führen.
Ein kurzer Abriss aus einem Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule aus dem Jahre 1881 soll ein Gefühl dafür entwickeln, welche Auffassungen es damals in der Methodik des elementaren Mathematikunterrichts gab [3].

1. Einführung

Das Gottlob-Frege-Zentrum erfuhr von der Wismarer Familie Dr. Edith und Dr. Joachim Framm, dass sie plant, eine Roman-Biographie über Gottlob Frege zu schreiben. Da beide aus dem medizinischen Umfeld kommen, suchten sie Verbündete und fachliche Beratung. Unsere Mitglieder waren sofort bereit zu helfen. Ich wollte die Familie Framm insbesondere bei mathematischen, logischen und philosophischen Fragen unterstützen. Ich vermittelte außerdem Kontakte zu den Frege-Kennern Prof. Dr. Lothar Kreiser und Prof. Dr. Ingo Max (beide Leipzig). Familie Framm lieferte mir die erforderlichen Unterlagen zu Freges Mathematik-Abitur aus dem Archiv der Hansestadt Wismar [8]. Dafür bin ich ihnen sehr dankbar. Daraus ergibt sich ein wichtiges Schlaglicht auf die Vergangenheit des Mathematikunterrichts an Gymnasien in Mecklenburg und auf die Vorkenntnisse des späteren Jenaer Mathematikprofessors Gottlob Frege. Ich versuche mit Kommentaren im Weiteren auch eine Brücke vom Jahre 1869 des Frege-Abiturs in die heutige Zeit zu schlagen.

2. Vorbemerkungen

Gottlob Frege wurde am 8. November 1848 in der Hansestadt Wismar geboren. Die Eltern Karl Alexander und Auguste Frege führten dort eine private höhere Töchterschule nach für damalige Verhältnissen fortschrittlichen Prinzipien. Leider verstarb Gottlobs Vater schon Ende 1866, und die resolute Mutter übernahm nach Genehmigung der Schulaufsicht des Rates der Stadt Wismar die Schulleitung.

Gottlob Frege besuchte von Oktober 1854 bis Ostern 1869 die Große Stadtschule in Wismar. Diese Schule für Knaben mit einem gymnasialen Teil hatte einen ausgezeichneten Ruf und zog daher auch viele Schüler aus dem Umland an. Gottlob bestand das Abitur mit einem Zeugnis „ersten Grades“ (wahrscheinlich damals die beste Kategorie). Das Ergebnis der Mathematikprüfung wurde vom Prüfer Dr. Sievert als „völlig befriedigend“ bewertet. Nach heutigen Maßstäben dürfte das der Note 1 (sehr gut) entsprechen. Neben Gottlob Frege erhielt auch sein Mitschüler Heinrich Baumann in der Mathematik dieses Prädikat.
Mit Gottlob zusammen legten nur noch fünf weitere Mitschüler am Gymnasium das Abitur ab. Neben den schon erwähnten Mathematikleistungen von Frege und Baumann gab es noch zweimal ein „genügend“ und zweimal ein „durchaus ungenügend“.
Das Mathematikabitur ist von besonderem Interesse, weil Gottlob Frege 1869 an der Thüringischen Landesuniversität in Jena ein Mathematikstudium aufnahm und später auf mathematischem Gebiet promovierte und habilitierte. Von 1874 bis 1918 lehrte er in Jena Mathematik. Berühmt geworden ist er allerdings später durch seine Arbeiten zur Logik und zu den Grundlagen der Mathematik (siehe z.B. [4], [5], [7]).

3. Die Aufgaben des Mathematik-Abiturs

Die folgenden Aufgaben stellte der Mathematiklehrer Dr. Sievert zum Mathematikabitur an der Großen Stadtschule Wismar im Februar 1869 den sechs Schülern Heinrich Baumann, Gottlob Frege, Paul Meyer, Wilhelm Mühlenbruch, Wilhelm Schönherr und Carl Thiessenhusen. Sie sollten sechs bis acht dieser zwölf Aufgaben lösen. Die Reihenfolge der Bearbeitung war freigestellt. Die Aufgaben liegen handschriftlich im Stadtarchiv Wismar vor [8]. Musterlösungen dazu fehlen aber. Die damalige Rechtschreibung wurde beibehalten. Nicht eindeutig lesbare Textteile sind durch „??“ gekennzeichnet. In meinen Ergänzungen und Kommentaren zu den Aufgaben und Lösungen (meist in blauer Schrift) nutze ich die moderne Rechtschreibung.

Aufgaben

1. Jemand zahlt am Anfang seines 45. Jahres 4000 Mark bei einer Altersversicherungsgesellschaft ein, um vom 65. Jahre ab eine am Schlusse jeden Jahres zahlbare Pension von 630 Mark zu beziehen. Wieviel Jahre kann er dieselbe erhalten, wenn die Gesellschaft das Geld [von Anfang an jährlich] zu $3\frac{1}{2}$ Prozent benutzt [verzinst]?
2. Aus $x^3 - 3x^2 - 12x - 112 = 0$ folgt x =?
   [Heute: Lösen Sie $x^3 - 3x^2 - 12x - 112 = 0.$]
3. Man sucht drei positive ganze Zahlen von solcher Beschaffenheit daß, wenn die erste mit 5, die zweite mit 13, die dritte mit 18 multipliziert wird, die Summe der Produkte 997 sei, wenn aber die erste mit 11, die zweite mit 20, die dritte mit 37 multipliziert wird, die Summe der Produkte 1866 sei. Welche Zahlen sind es? [Ergänzung: Wie viele solcher Zahlen gibt es überhaupt?]
4. Aus $\frac{4}{y^2} + \frac{4+y}{y} = \frac{8+4y}{x} + \frac{12y^2}{x^2}$ und $4y^2 - xy = x$ folgt $x = ?\ y = ?$
   [Heute: Lösen Sie das Gleichungssystem
   $$\frac{4}{y^2} + \frac{4+y}{y} = \frac{8+4y}{x} + \frac{12y^2}{x^2}, 4y^2 - xy = x.]$$
5. Die Summe von 700 Mark wurde unter vier Personen A, B, C und D [in dieser Reihenfolge] so vertheilt, daß die einzelnen Antheile eine geometrische Progression bildeten. Die Differenz der Antheile von A und D verhielt sich zur Differenz der Antheile von B und C wie 37 zu 12.
   Wieviel bekam jeder? [Oder: Bestimmen Sie die Anteile!]
6. Das Verhältnis der Diagonalen eines Vierecks im Kreise [d.h. eines Sehnenvierecks] ist zu finden, wenn die Seiten *a*, *b*, *c* und *d* gegeben sind.

7. Zeigen Sie: In jedem Paralleltrapez [heute: Trapez] ist die Summe der Quadrate über den Diagonalen gleich der Summe der Quadrate über den nicht parallelen Seiten vermehrt um das doppelte Rechteck aus den parallelen Seiten.
8. Von einem Sehnenviereck kennt man die vier Seiten *a*, *b*, *c*, *d*, man sucht die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und den Flächeninhalt *F*. (B.?? die gefundenen Werthe sind logarithmisch zu machen.) [Die Bezeichnungen wurden geändert, weil sie heute so nicht gebräuchlich und daher eher irreführend sind.]
9. Die Höhe eines Thurmes beträgt $a = 150$ Fuß und seine Entfernung von dem Ufer eines Stromes $b = 300$ Fuß. Wie groß ist die Breite desselben, wenn sie von der Spitze des Thurmes unter einem Winkel $\beta = 14^o\,59'\,58{,}9''$ erscheint?
10. Die Seiten eines Dreiecks sind zu berechnen, wenn zwei Winkel α und β und der Halbmesser [d.h. der Radius] ρ des eingeschriebenen Kreises gegeben sind.

    Beispiel: $\alpha = 50^o 12'\,25''$, $\beta = 74^o 4'\,40''$, $\rho = 250$ Fuß.
11. Aus dem Inhalte [d.h. dem Volumen] *I* und der Oberfläche *F* eines geraden Kegels [genauer: Kreiskegels] ist die Höhe *h* zu bestimmen.
12. Die Radien der Grundkreise eines abgekürzten geraden Kegels [heute: eines geraden Kreiskegelstumpfes] sind r und ρ, der Inhalt [d.h. das Volumen] desselben ist *V*. Wie groß ist [heute: sind] die Seite [gemeint ist die Länge der Mantellinie] und die Mantelfläche des abgekürzten Kegels?

    (B.?? Mit Einführung eines Hilfswinkels.)

    Beispiel: $r = 16{,}4$ Fuß, $\rho = 10{,}8$ Fuß, $V = 1648{,}72$ Cubikfuß.

Von den hier aufgezählten Aufgaben waren den Abiturienten 6 bis 8 in beliebiger Auswahl zur Lösung gestellt.

Wismar, d. 9. Februar 1869   *Sievert*

Einordnung der Aufgabentypen. Es wird von mir folgende nicht allgemein übliche Unterscheidung benutzt:

Konkrete Aufgabe: Die gegebenen Größen sind Zahlen.
Allgemeine Aufgabe: Die gegebenen Größen sind Variable.
Allgemeine Aufgabe mit Beispiel: Die gegebenen Größen sind zunächst Variablen. Am Ende werden die Variablen aber auch in einem Beispiel durch Zahlen konkretisiert.
Reine Aufgabe: Die mathematische Aufgabe ist im Text vorgegeben.
Textaufgabe: Aus dem Text muss die mathematische Aufgabenstellung erschlossen werden.
Sachaufgabe: Textaufgabe mit praktischen Hintergrund (Anwendung).

Die 12 Aufgaben lassen sich nun wie folgt charakterisieren. Dabei sind die von Gottlob Frege gelösten Aufgaben fett gesetzt:

1. *Konkrete Sachaufgabe*: Finanzmathematik, Rentenrechnung, Analysis, Lösung einer Gleichung mit einer Unbekannten im Exponenten.
2. ***Konkrete reine Aufgabe*:** Algebra, Kubische Gleichung, Cardanische Formel, Polynomdivision
3. ***Konkrete Textaufgabe*:** Lineare diophantische Algebra, zwei lineare Gleichungen mit positiven ganzen Koeffizienten und drei positiven ganzen Unbekannten.
4. *Konkrete reine Aufgabe*: Algebra, Lösung von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.
5. ***Konkrete Sachaufgabe*:** Algebra, geometrische Progression, Lösung von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, Lösung einer quadratischen Gleichung.
6. ***Allgemeine reine Aufgabe:*** Planimetrie, Geometrie des Sehnenvierecks, Trigonometrie.
7. *Allgemeine Textaufgabe*: Planimetrie, Geometrie des Trapezes bei gegebenen Seiten, Beweis eines Sachverhalts.
8. ***Allgemeine reine Aufgabe*:** Planimetrie, Geometrie des Sehnenvierecks, Trigonometrie.
9. *Konkrete Sachaufgabe*: Planimetrie, Geometrie des Dreiecks, Trigonometrie.
10. ***Allgemeine reine Aufgabe*:** Planimetrie, Geometrie des Dreiecks, Beteiligung des Inkreises, Trigonometrie.
11. *Allgemeine reine Aufgabe*: Stereometrie, gerader Kreiskegel, Algebra, Bestimmung einer Unbekannten aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

12. *Allgemeine reine Aufgabe mit Beispiel*: Stereometrie, gerader Kreiskegelstumpf, Algebra, Bestimmung von zwei Unbekannten aus drei Gleichungen.

Welche Hilfsmittel in Freges Mathematikabitur benutzt werden konnten, lässt sich nur vermuten. Auf jeden Fall brauchte man Tafeln der Logarithmen und der trigonometrischen Funktionen (siehe z.B. [2]). Ob die Abiturienten die notwendigen Formeln auswendig kennen mussten, weiß ich nicht. Auf jeden Fall spielte das Auswendiglernen aber eine wesentlich größere Rolle als heute.

Was kam damals z.B. nicht vor, was heute Gegenstand von Abituraufgaben ist:

- Lineare Algebra: Vektorrechnung, Gleichung von Geraden, Ebenen und Kugeln in Verbindung mit analytischer Geometrie,
- Analysis: Differential- und Integralrechnung,
- Stochastik: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.

In meinem Lehrbuch [6] findet man, abgesehen von der Stochastik, eine moderne Darstellung dazu. Außerdem wird in die Mathematiksoftware MATLAB so eingeführt, dass man auch damit die gestellten Aufgaben lösen kann. Dann braucht man weder Tafelwerke noch Taschenrechner. Zudem stehen in MATLAB viele Möglichkeiten der Veranschaulichung zur Verfügung, sodass auch Skizzen durch professionelle Darstellungen ersetzbar sind. Trotzdem sollten Kopfrechnen und schriftliches Rechnen nicht vernachlässigt werden.

4. Gottlob Freges Lösungen

Gottlob Frege löste 6 der 12 Aufgaben (fast vollständig) in der angegebenen Reihenfolge, d.h. Aufgabe 5, Aufgabe 3, Aufgabe 2, Aufgabe 8, Aufgabe 6 und Aufgabe 10. Die Niederschrift der Lösungswege erfolgte übersichtlich in sauberer Schrift. Frege gab zu den Lösungen und Berechnungen allerdings keine Erläuterungen. Das wurde vom Prüfer Dr. Sievert so akzeptiert. Aus meiner Sicht zeigt sich deutlich, dass Frege zielgerichtet arbeitete und versiert im Umgang mit mathematischen Formeln war. Es steht außer Frage, dass er damit den Anforderungen eines damaligen Mathematikstudiums ohne Einschränkungen gewachsen war. Eine Hochbegabung für das Fach Mathematik lässt sich aus der Abiturarbeit von Frege jedoch nicht erkennen.
Um die Verständlichkeit heute zu erhöhen, habe ich oft einzelne Schritte bei der Lösung der Aufgaben kommentiert und einige Schreibweisen modifiziert. Die

Kommentare sind in der Regel schwarz gesetzt, in besonderen Fällen und bei Ergänzungen in Formeln blau. Gottlob Freges Verzicht auf verbale Kommentierung setzte sich später bis zur Verfassung seiner Begriffsschrift fort. Danach merkte er allmählich an den Reaktionen der Leser, dass er mit diesem Minimalismus viele verschreckte und zudem Fehlurteilen Vorschub leistete [5, Kapitel 1].

I. Aufgabe 5.

Die Summe von 700 Mark wurde unter vier Personen A, B, C und D [in dieser Reihenfolge] so vertheilt, daß die einzelnen Antheile eine geometrische Progression bildeten. Die Differenz der Antheile von A und D verhielt sich zur Differenz der Antheile von B und C wie 37 zu 12.
Wieviel bekam jeder? [Oder: Bestimmen Sie die Anteile!]

Lösung: Anteile der Personen nach geometrischer Progression:

A: x, B: xy, C: xy^2, D: xy^3

Das gegebene Verhältnis der Differenzen der Anteile

$$(x - xy^3) : (xy - xy^2) = 37 : 12$$

führt auf eine algebraische Gleichung, die man auch in Bruchform schreiben könnte. Das Ausklammern

$$x(1 - y^3) : xy(1 - y) = 37 : 12$$

und Kürzen liefert eine Gleichung mit einer Unbekannten:

$$\frac{1 - y^3}{1 - y} : y = 37 : 12.$$

Polynomdivision im Bruch (Nebenrechnung):

$$(1 + y + y^2) : y = 37 : 12$$

Vereinfachung:

$$(1 + y^2) : y = 25 : 12 \text{ (bzw. } \tfrac{1+y^2}{y} = \tfrac{25}{12}\text{)}$$

Zurückführung auf eine quadratische Gleichung (Beseitigung der Nenner):

$$12 + 12y^2 = 25y$$

Normalform für die *quadratische Gleichung*:

$$y^2 - \frac{25}{12}\,y = -1 \quad \left(\text{bzw. } y^2 - \frac{25}{12}\,y + 1 = 0\right)$$

Lösungsformel mit Umformung und geschickter Anwendung der *dritten Binomischen Formel:*

$$y = \frac{25}{24} \pm \sqrt{\left(\frac{25}{24}\right)^2 - \frac{24}{24}} = \frac{25}{24} \pm \sqrt{\frac{(25+24)(25-24)}{24^2}}$$

Weitere Umformung:

$$y = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{24} = \frac{25 \pm 7}{24}$$

Die Lösungen für y lauten

$$y_1 = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}, y_2 = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}.$$

Die zweite Unbekannte x ergibt sich aus der Gleichung für die Verteilungssumme:

$$x + xy + xy^2 + xy^3 = 700\ .$$

Ausklammern von x:

$$x(1 + y + y^2 + y^3) = 700$$

Nach x umgestellte Gleichung:

$$x = \frac{700}{1 + y + y^2 + y^3}$$

Einsetzen der Werte von y in die Gleichung:

$$x_1 = \frac{700}{1 + \frac{4}{3} + \frac{16}{9} + \frac{64}{27}} = \frac{700 \cdot 27}{27 + 36 + 48 + 64} = \frac{700 \cdot 27}{175} = 4 \cdot 2 = 108$$

$$x_2 = \frac{700}{1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64}} = \frac{700 \cdot 64}{64 + 48 + 36 + 27} = \frac{700 \cdot 64}{175} = 4 \cdot 6 = 256$$

Berechnung der Anteile x, xy, xy^2, xy^3 der 4 Personen:

Erster Fall: A: 108, B: 144, C: 192, D: 256.

Zweiter Fall: A: 256, B: 192, C: 144, D: 108.

Daraus erkennt man, dass die Anteile selbst eindeutig sind, die Verteilung auf die Personen aber nicht. Nach Festlegung der Reihenfolge wie in der Lösung können sie auf zwei Weisen auf die Personen verteilt werden.

II. Aufgabe 3.

Man sucht drei positive ganze Zahlen von solcher Beschaffenheit daß, wenn die erste mit 5, die zweite mit 13, die dritte mit 18 multipliziert wird, die Summe der Produkte 997 sei, wenn aber die erste mit 11, die zweite mit 20, die dritte mit 37 multipliziert wird, die Summe der Produkte 1866 sei. Welche Zahlen sind es? [Ergänzung: Wie viele solcher Zahlen gibt es überhaupt?]

Lösung: Gesucht sind positive ganze Zahlen *x*, *y*, *z* mit

(1) $5x + 13y + 18z = 997$

(2) $11x + 20y + 37z = 1866$

Angleichung der Koeffizienten von *x* in (1) und (2):

$$55x + 143y + 198z = 10967$$

$$55x + 100y + 185z = 9330$$

Elimination von *x* durch Subtraktion:

(3) $43y + 13z = 1637$

Bei der Suche nach einer ganzzahligen Lösung erfolgt eine Umstellung von (3) nach *z* (mit Abspaltung des ganzen Anteils):

$$13z = 1637 - 43y,\ z = 126 - 3y + \frac{-1-4y}{13}$$

Der Bruch muss ganzzahlig sein:

$$-1 - 4y = 13a < 0,\ y = \frac{-13a-1}{4},\ y = -3a + \frac{-a-1}{4},$$

$$\frac{-a-1}{4} = b > 0,\ a = a(b) = -4b - 1$$

Ersetzen von *a* durch den Ausdruck *a*(*b*) in *y*:

$$y = 12b + 3 + b,\ y = 13b + 3$$

Ersetzen von $y = y(b)$ in *z*:

$$z = 126 - 39b - 9 - 4b - 1,\text{ d.h. } z = 116 - 43b$$

Einsetzen von $y = y(b)$ und $z = z(b)$ in (3) bringt nichts: die Anteile von *b* heben sich auf !!!

Einsetzen von *y* = *y*(*b*) und z = z(*b*) in (1):

$$5x + (169b + 39) + (2088 - 774b) = 997\,.$$

Es folgt:

$$5x - 605b = -1130,\ x - 121b = -226,\ x = -226 + 121b\ .$$

Jetzt hat man die ganzzahligen Lösungen in Abhängigkeit vom ganzzahligen Parameter *b*. Spezielle Lösungen erhält man durch Wahl eines ganzzahligen *b*. Sollen *x*, *y*, *z* positiv sein, kommt nur $b = 2$ in Frage. Diese Wahl führt auf

$$y = 29, z = 30, x = 16\ .$$

Es gibt also genau eine Lösung.

Anmerkung des Autors:

In der heutigen Ausbildung werden unterbestimmte lineare Gleichungssysteme zwar behandelt, aber in den Grundlagen ohne die Einschränkung auf ganzzahlige Lösungen (siehe z.B. [6: Kapitel 6]). Zunächst würde man wie oben durch Elimination (hier von *x*) das reduzierte System (1), (3) erhalten:

$$\begin{aligned} 5x + 13y + 18z &= 997 \\ 43y + 13z &= 1637\ . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die Koeffizientenmatrix der Rang 2. Das bedeutet geometrisch, dass die beiden durch die Gleichungen beschriebenen Ebenen im Raum eine Schnittgerade haben, deren analytische Form die allgemeine Lösung des Gleichungssystems darstellt. Neben dem inhomogenen System (1), (3) wird z.B. das homogene System

$$\begin{aligned} 5x + 13y + 18z &= 0 \\ 43y + 13z &= 0\ . \end{aligned}$$

betrachtet. Nun bestimmt man für beide Systeme je eine spezielle Lösung. Dazu setzen wir in beiden Fällen $z = 1$. Es folgt (Index *i* steht für *inhomogen*, Index *h* für *homogen*)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_i = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} 4197 \\ 1624 \\ 43 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_h = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} -121 \\ -13 \\ 43 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung des Gleichungssystems enthält einen reellen Parameter *t* und lautet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_i + t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_h .$$

Daraus ergeben sich die drei Gleichungen

$$43x = 4197 - 121t$$

$$43y = 1624 - 13t$$

$$z = t + 1$$

Es ist leicht zu sehen, dass für die ganzzahligen Lösungen nur endlich viele positive ganze Werte von t in Frage kommen. Aus der dritten Gleichung erhält man $t \geq 0$ ganz. Der Wert $t = 0$ liefert keine ganzzahligen Lösungen. Aus der ersten Gleichung liest man $t \leq 34$ ab. Für $t = 29$ folgt dann tatsächlich die schon bekannte Lösung

$$x = 16, y = 29, z = 30.$$

Man erkennt aber, dass das von Frege benutzte Vorgehen bei schriftlichem Rechnen effektiver ist. Es überrascht nicht, dass Diophantische Probleme (benannt nach dem Griechen *Diophantos von Alexandria*, ca. 200-284, der algebraische Probleme auf ganzzahlige Lösungen untersuchte) spezifische Methoden hervorbringen.

III. Aufgabe 2.

Aus $x^3 - 3x^2 - 12x - 112 = 0$ folgt x =?

[Heute: Lösen Sie $x^3 - 3x^2 - 12x - 112 = 0$.]

Lösung: Die Gleichung $P_3(x) = 0$ mit dem kubischen Polynom

$$P_3(x) \coloneqq x^3 - 3x^2 - 12x - 112$$

ist schon in Normalform, der führende Koeffizient (vor x^3) ist 1. Man bringt diese zunächst auf die reduzierte Form (ohne quadratisches Glied).

Substitution: Ist a der Koeffizient von x^2, so wird gesetzt

$$x := z - \frac{a}{3} = z + 1.$$

Die neue Gleichung lautet:

$$z^3 + 3z^2 + 3z + 1 - 3z^2 - 6z - 3 - 12z - 12 - 112 = 0\,.$$

Das heißt:

$$z^3 + pz + q = z^3 - 15z - 126 = 0.$$

Die *Cardanische Formel* (gefunden von *Nicolo Tartaglia*, ca. 1500-1557, benannt nach *Geronimo Cardano*, ca. 1501-1576, siehe z.B. [1: S. 103], angepasst an Freges Berechnung)

$$u = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2}}, \qquad v = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2}}$$

Erste Lösung:

$$z_1 = u + v = \sqrt[3]{\frac{126 + \sqrt{126^2 - \frac{4}{27}\,15^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{126 - \sqrt{15876 - 500}}{2}}$$

(Hier werden im zu *u* analogen Term *v* schon Zwischenergebnisse berechnet.)

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{126 + \sqrt{15376}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{126 - \sqrt{15376}}{2}}$$

Nebenrechnung bei Frege: Schriftliches Wurzelziehen $\sqrt{15376} = 124$.

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{126 + 124}{2}} + \sqrt[3]{\frac{126 - 124}{2}}, \qquad z_1 = \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{1} = 5 + 1 = 6.$$

Rücksubstitution liefert die reelle Lösung:

$$x_1 = z_1 + 1 = 7.$$

Anmerkungen des Autors:

1. Dr. Sievert ergänzt bei der Korrektur die fehlenden komplexen Lösungen:

$$x = -2 \pm 2\sqrt{-3}.$$

Fährt man nach der Cardanischen Formel fort, folgt dies aus

$$z_{2/3} = -\frac{u+v}{2} \pm \frac{u-v}{2}\sqrt{3}\,i = -3 \pm 2\sqrt{3}\,i$$

und der Rücksubstitution

$$x_{2/3} = z_{2/3} + 1 = -2 \pm 2\sqrt{3}\, i.$$

Das entspricht der Lösungsangabe von Dr. Sievert, wobei $\sqrt{-1} = i$ zu setzen ist und i die imaginäre Einheit darstellt.

2. Das Paar $x_{2/3}$ ist konjugiert komplex. Im Einklang mit dem Fundamentalsatz der Algebra (siehe z.B. [1: S. 105], [6: S.38]) hat eine Gleichung dritten Grades genau drei Lösungen. Davon sind eine (wie in diesem Falle) oder alle drei reell, da bei reellen Polynomkoeffizienten komplexe Lösungen immer paarweise konjugiert auftreten. Auch in der Analysis folgt sofort, dass ein kubisches Polynom $P_3(x)$ mindestens eine reelle Nullstelle hat. Ist der Koeffizient vor x^3 positiv (in unserem Falle 1), so gilt

$$\lim_{x\to-\infty} P_3(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} P_3(x) = +\infty\,.$$

Da $P_3(x)$ stetig ist, ergibt sich die Behauptung aus dem Zwischenwertsatz (siehe z.B. [1: S. 326], [6: S. 263]). Man kann die reelle Nullstelle x_1 leicht einschränken, wenn man Stellen a und b mit $f(a) \cdot f(b) < 0$ findet. Aus den im Kopf berechenbaren Werten $P_3(0) = -112 < 0$ und $P_3(10) = 468 > 0$ ergibt sich z.B. $x_1 \in\,]0{,}10[$.

3. Warum Gottlob Frege die komplexen Lösungen nicht angibt, bleibt spekulativ. Für mich sieht es so aus, als glaubte Frege, dass nur die reelle Lösung gesucht wäre. Unter dieser Bedingung hätte Frege die Aufgabe vollständig gelöst.

Warum Frege sicherheitshalber nicht den Lehrer gefragt hat, ob auch die komplexen Lösungen anzugeben sind, weiß ich nicht. Aber begabte Schüler sind oft recht eigensinnig und entscheiden so etwas nach eigenem Gutdünken.

4. Da alle übrigen fünf Abiturienten die komplexen Lösungen mit angegeben haben, scheint das im Unterricht so behandelt worden zu sein. Allerdings nutzen diese nicht den oben angegebenen Weg, sondern dividieren das Ausgangspolynom $P_3(x)$ zunächst durch den Linearfaktor $x - x_1 = x - 7$. Es ist nämlich bekannt, dass

$$P_3(x) = (x - x_1) \cdot Q_2(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

gilt [1: 105]. Dieses Vorgehen führt auf das quadratische Polynom

$$Q_2(x) = x^2 + 4x + 16.$$

Dessen Nullstellen x_2 und x_3 sind nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen gerade die fehlenden (konjugiert) komplexen Lösungen. Vielleicht hat Gottlob Frege die Behandlung solcher Aufgaben wegen Krankheit in der Schule nicht vollständig miterlebt? Oder er wollte einfach schnell weitere Aufgaben rechnen? Schließlich zählte sicher der Umfang der richtigen Lösungen bzw. Teillösungen für das Endergebnis.

5. Heute wird die Cardanische Formel in der Schule nicht mehr verwendet. Bei entsprechenden Aufgaben kann man oft eine reelle Lösung raten oder durch (systematisches) Probieren finden (was hier auch möglich gewesen wäre, wenn man $P_3(x)$ für einige ganze Zahlen *x* berechnet und die Größe der Funktionswerte dabei beachtet). Dann wird wie unter Punkt 4 erläutert verfahren. Die Berechnung von $P_3(x)$ oder das Dividieren von $P_3(x)$ durch $x - x_1$ kann übrigens effizient mit dem Horner-Schema [1: 106] vorgenommen werden, welches nach *William George Horner* (1786-1837) benannt ist.

Eine andere Möglichkeit besteht in der Verwendung von Iterationsverfahren (siehe z.B. [1: S. 115f.]. Das klassische Newton-Verfahren (*Isaac Newton*, 1643-1727) bzw. Tangentenverfahren hat im vorliegenden Fall $P_3(x) = 0$ die Form

$$\begin{aligned} x_{n+1} &:= x_n - \frac{P_3(x_n)}{P_3'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n^2 - 12x_n - 112}{3x_n^2 - 6x_n - 12} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2x_n^3 - 3x_n^2 - 112}{x_n^2 - 2x_n - 4}, \qquad n = 0,1,\ldots \end{aligned}$$

mit einem geeigneten Startwert x_0 [1: S. 117]. Auch hier ist beim Berechnen von $P_3(x_n)$ und der entsprechenden Ableitung $P_3'(x_n)$ wieder das Horner-Schema vorteilhaft einsetzbar. Obwohl man z.B. für $x_0 = 5$ oder $x_0 = 8$ nach wenigen Iterationsschritten schon einen sehr guten Näherungswert für die reelle Lösung $x_* = 7$ erhält, ist z.B. für $x_0 = 1 - \sqrt{5}$ oder $x_0 = 1 + \sqrt{5}$ das Verfahren nicht durchführbar, weil der Nenner dann 0 ist, und für andere Startwerte kann es divergieren. Eine Konvergenzuntersuchung würde genauere Einsichten bringen.

Auch die sogenannte Regula falsi als einschachtelndes Sekantenverfahren [1: S. 118] ist mit den beiden Startwerten $x_0 = 5$ und $x_1 = 8$ einsetzbar. Die Startbedingung $P_3(x_0) \cdot P_3(x_1) < 0$ ist hier erfüllt.

6. Anschaulicher wird es, wenn man die kubische Funktion

$$P_3(x) = x^3 - 3x^2 - 12x - 112$$

graphisch darstellt. Dann sieht man, dass genau eine reelle Nullstelle (Schnittstelle mit der *x*-Achse) existiert und dass man durch eine geeignete Verschiebung des Graphen (hier nach oben) auch drei reelle Nullstellen bekommt. Die Funktion

$$g(x) = f(x) + 112 = x^3 - 3x^2 - 12x = x \cdot (x^2 - 3x - 12)$$

hat z.B. die Nullstellen

$$x_1 = 0,\ \ x_{2/3} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{57}.$$

Andere Eigenschaften der Funktion $f(x)$ könnte man im Rahmen einer Kurvendiskussion ermitteln [6: S. 320f.].

IV. Aufgabe 8:

Von einem Sehnenviereck kennt man die vier Seiten *a*, *b*, *c*, *d*, , man sucht die Winkel α, β, γ, δ und den Flächeninhalt *F*.

(B.??: die gefundenen Werthe sind logarithmisch zu machen.)

[Die Bezeichnungen wurden geändert, weil sie heute so nicht gebräuchlich und daher eher irreführend sind.]

Lösung:

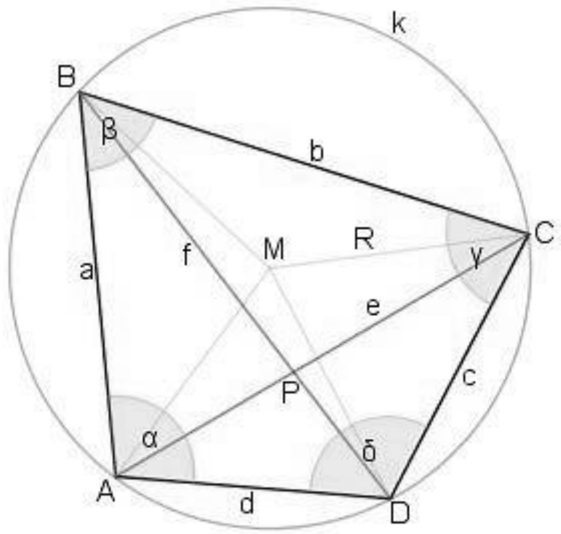

Abb. 8.1: Sehnenviereck (bei Frege Skizze mit anderen Bezeichnungen)

Die Eckpunkte des Sehnenvierecks sind im Uhrzeigersinn A, B, C, D, die entsprechenden Winkel sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die anschließenden Seiten haben die Längen a, b, c, d und die Diagonalen haben die Längen $e = \overline{\mathrm{AC}}$, $f = \overline{\mathrm{BD}}$. Diese spielen allerdings erst in der nachstehenden Aufgabe 6 eine Rolle. Die Diagonalen zerlegen das Sehnenviereck jeweils in zwei Dreiecke (siehe Abb. 8.1, zum Sehnenviereck siehe [1: S. 185]).

Ich setze die Argumente der trigonometrischen Funktionen in Klammern. Gottlob Frege verzichtet auf diese Klammern, wenn keine Missverständnisse entstehen. Das ist auch die heute noch gängige Vorgehensweise.

Kosinussatz im Dreieck ABD:

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos(\alpha)\,,$$

Kosinussatz im Dreieck BCD:

$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\gamma)$$

(siehe z.B. [1: S. 177]). Da $\alpha + \gamma = 180^o$ gilt, folgt aus der letzten Beziehung

$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180^o - \alpha),$$

$$f^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(\alpha)$$

Gleichsetzen mit der ersten Beziehung und Umformung:

$$b^2 + c^2 + 2bc\cos(\alpha) = a^2 + d^2 - 2ad\cos(\alpha),$$

$$(2bc + 2ad)\cos(\alpha) = a^2 + d^2 - b^2 - c^2.$$

Auflösung nach dem Kosinus des Winkels:

$$(8.1) \quad \boldsymbol{\cos(\alpha) = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(bc + ad)}}.$$

Daraus resultiert schon α, da der Kosinus im Bereich $[0^o, 180^o]$ eindeutig umkehrbar ist. Dann folgt im Sehnenviereck $\gamma = 180^0 - \alpha$. Schließlich können β und δ analog berechnet werden wie α und γ:

$$(8.2) \quad \cos(\beta) = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(cd + ab)}, \delta = 180^0 - \beta .$$

Außerdem sind γ und δ durch entsprechende Formeln wie (1) und (2) auch unabhängig von α und β bestimmbar.

Frege geht einen anderen Weg, wahrscheinlich um gleich die Flächenbestimmung anzugehen.

Halbwinkelbeziehungen: [1: S. 355]

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = (\pm)\sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}, \qquad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = (\pm)\sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}$$

Da α im Bereich $[0^o, 180^o]$ liegt, kann man die negativen Vorzeichen vor den Wurzeln weglassen.

Einsetzen des Kosinusausdruckes und binomische Formeln liefern:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{2bc + 2ad - a^2 - d^2 + b^2 + c^2}{4(bc + ad)}},$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-(a-d)^2 + (b+c)^2}{bc + ad}}.$$

Die Anwendung der dritten binomischen Formel bringt den Halbwinkelsatz:

$$(8.3) \quad \boldsymbol{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(-a + b + c + d)(a + b + c - d)}{bc + ad}}}.$$

Auch hieraus ließe sich α bestimmen. Bei schriftlichem Rechnen mit konkreten Werten bedeutet die Wurzel aber einen zusätzlichen Aufwand gegenüber (1).

Analog ergibt sich für den Kosinus

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{2bc + 2ad + a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{4(bc + ad)}},$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+d)^2 - (b-c)^2}{bc + ad}}$$

und mit der dritten binomischen Formel den Halbwinkelsatz

$$\boldsymbol{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b-c+d)(a-b+c+d)}{bc+ad}}}.$$

Dr. Sievert merkte hier an: Warum nicht tg $\frac{\alpha}{2}$? (Heute wird der Tangens meist mit ‚tan' statt ‚tg' abgekürzt.)

Die *Doppelwinkelbeziehung* für den halben Winkel [1: S. 354]

$$\sin(\alpha) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

führt dann auf

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{bc+ad}.$$

Die Fläche des Sehnenvierecks ist die Summe zweier Dreiecksflächen (siehe Abb. 8.1). Daraus folgt:

$$F = \frac{1}{2}\,ad\,\sin(\alpha) + \frac{1}{2}\,bc\,\sin(\gamma),$$

$$F = \frac{1}{2}\,ad\,\sin(\alpha) + \frac{1}{2}\,bc\,\sin(\alpha)\ \ (\text{da } \alpha + \gamma = 180^o),$$

$$F = \frac{1}{2}\sin(\alpha)\ (ad + bc)$$

Das heißt:

(8.4) $$\boldsymbol{F = \frac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}.$$

Heute ist die elegantere und kürzere Schreibweise

$$(8.4s)\quad F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, s := \frac{1}{2}U = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$$

üblich, wobei U den Umfang des Vierecks bezeichnet. Diese Formel stellt eine Übertragung der *Heronschen Formel* für Dreiecke [1: S. 180] auf Vierecke dar und wird auch nach *Brahmagupta* benannt.

Es folgen analoge *Halbwinkelsätze* für die anderen Winkel:

$$\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)}{ab+cd}},$$

$$(8.5)\quad \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a-b+c+d)(a+b-c+d)}{bc+ad}},$$

$$\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{ab+cd}}.$$

Daraus erhält man β, γ und δ. Wie weiter vorn beschrieben, kann man zur Bestimmung dieser Winkel auch anders vorgehen. Schließlich ist die Herleitung der Flächenformel ohne Verwendung der Halbwinkelsätze möglich.

Anmerkungen des Autors:

1. Das vom Prüfer in der Aufgabe geforderte Logarithmieren der Ausdrücke für die Winkel und die Fläche hat Frege übersehen oder ignoriert. Bei der Bewertung wurde es ihm auch nicht angelastet. Praktisch macht es nur Sinn bei einem Beispiel, wo mit Tafeln gerechnet wird (siehe Beispiel zu Aufgabe 10). Hieraus ergibt sich möglicherweise eine Neubewertung der Formeln. Für (8.1) und (8.3) folgt unter Beachtung der Logarithmengesetze z.B.

$$\log\cos(\alpha) = \log(a^2+d^2-b^2-c^2) - \log(bc+ad) - \log(2),$$

$$\log\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\log(-a+b+c+d) + \frac{1}{2}\log(a+b+c-d)$$
$$-\frac{1}{2}\log(bc+ad) - \log(2).$$

Bei dem zweiten Ausdruck muss man keine Quadrate der Seitenlängen bilden.

2. Für eine Konkretisierung der Aufgabe sind die Längen der vier Seiten a, b, c, d vorzugeben. Die Angaben können aber nicht beliebig sein, da sich nur unter bestimmten Bedingungen ein Viereck und unter noch stärkeren Bedingungen ein Sehnenviereck ergibt. Für ein (nichtentartetes) Viereck muss offensichtlich die größte Seitenlänge kleiner als die Summe der drei anderen Seitenlängen sein. Daher ist notwendigerweise

(8.6) $s = \frac{U}{2} = \frac{a+b+c+d}{2} > \max\{a, b, c, d\}$.

erfüllt. Gilt diese Ungleichung, so existieren (unendlich) viele Vierecke mit diesen Seitenlängen, genau eines davon ist ein Sehnenviereck. Wählt man zwei Punkte A und B mit dem Abstand $a = \overline{\mathrm{AB}}$, dann darf der dritte Punkt C mit dem Abstand $b = \overline{\mathrm{BC}}$ von B nicht kollinear zu A und B (auf der Geraden durch A und B) liegen. Sind A, B und C derart gesetzt (und damit der Winkel β bei B und die Strecke $e = \overline{\mathrm{AC}}$, so ist durch sie eindeutig ein Kreis bestimmt. Soll der vierte Punkt D mit den Abständen $d = \overline{\mathrm{AD}}$ und $c = \overline{\mathrm{CD}}$ auch auf diesem Kreis liegen, ist seine Wahl und damit die von c und d offensichtlich eingeschränkt. Um überhaupt ein Viereck zu erhalten, muss $c + d > e$ sein. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für ein Sehnenviereck liefert die *Formel von Ptolemäus*:

$$ef = ac + bd$$

[1: S. 185]. Da man die Diagonalen e und f durch die vier Seiten a, b, c und d ausdrücken kann (siehe die folgende Aufgabe 6), lässt sich so überprüfen, ob ein Sehnenviereck vorliegt. Eine andere Möglichkeit ist die Kontrolle der Winkelbedingung, ob die gegenüberliegenden Winkel sich jeweils zu 180^o ergänzen. Das setzt allerdings voraus, dass man die Winkel unabhängig voneinander bestimmt hat. Man wird aber auch bei Berechnung der Winkel oder des Flächeninhaltes mit den Formeln aus Aufgabe 8 merken, dass bei bestimmten Vorgaben kein Sehnenviereck entsteht (siehe Beispiele unten). So müssen die durch die Seitenlängen ausgedrückten Kosinus der Winkel dem Betrag nach stets kleiner 1 sein (siehe Formeln (8.1) und (8.2)) und der halbe Umfang s muss jede Seitenlänge übertreffen (siehe (8.6) und (8.4s)).

3. Sind zwei gegenüberliegende Seitenlängen gleich, so erhält man für das Sehnenviereck ein Trapez. Wir nehmen $b = d$ an. Aus (8.1) und (8.2) ergibt sich die Beziehung $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$. Das bedeutet $\alpha = \beta$ und dann auch $\gamma = \delta$. Damit laufen die anderen beiden Seiten (hier a, c) parallel.

4. Sind die jeweils gegenüberliegenden Seitenlängen gleich $(a = c, b = d)$, so folgt für das Sehnenviereck aus (8.1) und (8.2) sofort $\cos\alpha = \cos\beta = 0$, sodass alle vier Winkel gleich 90^o sind, also ein Rechteck mit dem Flächeninhalt $a \cdot b$ vorliegt. Bei Vorgabe eines Winkels kommt man zu einem Parallelogramm. Die übrigen Winkel und der Flächeninhalt stehen dann fest.

5. Sind alle vier gegebenen Seitenlängen gleich $(a = b = c = d)$, so ist das Sehnenviereck ein Quadrat, während allgemeiner nach Vorgabe eines Winkels ein Rhombus entsteht.

6. Sind die angrenzenden Seitenlängen gleich $(\text{z. B. } a = b, c = d)$, so erhält man Drachenvierecke. Für das Sehnenviereck unter diesen ergibt sich aus (8.1) und (8.2)

$$\cos(\alpha) = 0, \quad \cos(\beta) = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}.$$

Daher sind α und γ rechtwinklig, B und D liegen sich diametral gegenüber und der Flächeninhalt beträgt $F = a \cdot c$.

Beispiele. Wir benutzen dimensionslose Einheiten.

1. Sehnenviereck mit Seitenlängen $a = 8, b = 5, c = 10, d = 9$.

Nach (8.1) ist

$$\cos(\alpha) = \frac{64 + 81 - 25 - 100}{2 \cdot (50 + 72)} = \frac{20}{244} = \frac{5}{61} \approx 0{,}082\,,$$

woraus $\alpha \approx 85{,}3^o$ und $\gamma = 180^o - \alpha \approx 94{,}7^o$ folgt. Berechnet man α und γ unabhängig voneinander mit Hilfe der Halbwinkelsätze (8.3) und (8.5), ergeben sich (bis auf Rundungseffekte) die gleichen Werte:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{16 \cdot 14}{122}} = \frac{2}{61}\sqrt{427} \approx 0{,}6775 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \approx 42{,}65^{o}, \alpha \approx 85{,}3^{o}\ ,$$

$$\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{22 \cdot 12}{122}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{264}{122}} \approx 0{,}7355 \Rightarrow \frac{\gamma}{2} \approx 47{,}35^{o}, \gamma \approx 94{,}7^{o}\ .$$

Nach (8.2) ist

$$\cos(\beta) = \frac{64 + 25 - 100 - 81}{2 \cdot (90 + 40)} = -\frac{92}{260} = -\frac{23}{65} \approx -0{,}3538\ .$$

Das bedeutet $\beta \approx 110{,}7^{o}$ und $\delta = 180^{o} - \beta \approx 68{,}3^{o}$. Schließlich erhält man nach Formel (8.4) für den Flächeninhalt (in Flächeneinheiten)

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{16 \cdot 22 \cdot 12 \cdot 14} = 4\sqrt{231} \approx 60{,}8\ .$$

Man kann sich davon überzeugen, dass die Vorgaben mit den berechneten Größen tatsächlich ein Sehnenviereck liefern. Die Bedingung (8.6) gilt wegen

$$s = 15 > 10 = \max\{a, b, c, d\}.$$

Die Gleichung von Ptolemäus ist erfüllt (siehe Beispiel zu Aufgabe 6). Nach der Formel [1: S. 185]

$$r_u = \frac{1}{4F}\sqrt{(ab + cd) \cdot (ac + bd) \cdot (ad + bc)}$$

kann man auch den Radius des Umkreises bestimmen. Hier ist

$$r_u = \frac{1}{16\sqrt{231}} \cdot \sqrt{130 \cdot 125 \cdot 122} = 5{,}79\ .$$

2. Will man ein Viereck mit den obigen Seitenlängen

$$a = 8, b = 5, c = 10, d = 9$$

haben, welches kein Sehnenviereck ist, muss man einen Winkel oder eine Diagonale anders vorgeben. Wir wählen hier $\beta = 60^{o}$ statt $\beta \approx 110{,}7^{o}$ oben. Dadurch wird das Viereck deutlich „schlanker“. Dann folgt für die Länge $e = \overline{\mathrm{AC}}$ (der Seite im Dreieck ABC oder der Diagonale im Viereck ABCD) nach dem *Kosinussatz*

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\beta) = 89 - 80 \cdot \frac{1}{2} = 49, e = 7\ .$$

Im Dreieck ACD ergibt sich ebenfalls nach dem *Kosinussatz*

$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(\delta),$$

was durch Umstellung auf

$$\cos(\delta) = \frac{c^2 + d^2 - e^2}{2cd} = \frac{181 - 49}{180} = \frac{11}{15}, \delta \approx 42{,}83^o$$

führt. Somit ist auch $\beta + \delta < 180^o$, sodass tatsächlich kein Sehnenviereck vorliegt. Da man in den Dreiecken ABC und ACD alle Winkel berechnen kann, lassen sich daraus auch die fehlenden Winkel α und β bestimmen, wobei zusätzlich noch $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^o$ erfüllt ist. Die Fläche dieses Vierecks beträgt nach der Formel von Bretschneider [1: S. 184]:

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right)}.$$

Für ein Sehnenviereck geht sie in (4s) über. Die Formel zeigt im Übrigen, dass unter allen Vierecken mit gleichen Seitenlängen das Sehnenviereck die größte Fläche hat.

In unserem Fall ist mit dem halben Umfang $s = 16$

$$F^2 \approx 8 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 7 - 3600\cos^2(51{,}415^o) \approx 797{,}1 \text{ und } F \approx 28{,}23$$

anstelle von $F^2 = 8 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 7 = 3696$, $F \approx 60{,}8$ beim zugehörigen Sehnenviereck. Die Fläche ist also deutlich kleiner.

3. Gegeben sind die Seitenlängen $a = 1, b = 3, c = 6, d = 2$.

Nach (8.1) resultiert

$$\cos\alpha = \frac{1 + 4 - 9 - 36}{2 \cdot (18 + 2)} = \frac{-40}{40} = -1\,.$$

Das liefert die unsinnigen Winkel $\alpha = 180^o$ und $\gamma = 0^o$. Die Flächenformel (8.4) führt auf den Inhalt

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{10 \cdot 6 \cdot 0 \cdot 8} = 0\,.$$

Es liegt kein Sehnenviereck vor (Entartung). Da (8.6) wegen

$$s = \max\{a, b, c, d\} = 6$$

verletzt ist, gibt es kein eigentliches Viereck zu diesen Daten.

4. Gegeben sind die Seitenlängen $a = 1, b = 3, c = 10, d = 2$.

Nach (8.1) und (8.4) folgt

$$\cos(\alpha) = \frac{1 + 4 - 9 - 100}{2 \cdot (30 + 2)} = \frac{-104}{64} = -1{,}625 < -1\,,$$

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{14 \cdot 10 \cdot (-5) \cdot 12}\,.$$

Weder α noch F sind bestimmbar. Es handelt sich um kein Sehnenviereck.

Wegen $s = 8 < \max\{a, b, c, d\} = 10$ existiert kein Viereck zu diesen Daten.

V. Aufgabe 6:

Das Verhältnis der Diagonalen eines Vierecks im Kreise (Sehnenvierecks) ist zu finden, wenn die Seiten *a*, *b*, *c*, *d*, gegeben sind.

Lösung:

Da es sich wie bei Aufgabe 8 um Berechnungen im Sehnenviereck bei gegebenen Seiten handelt, versucht Frege zunächst, die dortigen Ergebnisse zur Lösung zu benutzen.

Die Bezeichnungen werden wie in Aufgabe 8 gewählt (siehe dazu Abb. 8.1). Die Längen der Diagonalen sind *f* und *e*.

In der Aufgabe 8 ist gefunden:

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos(\alpha)\,, \qquad \cos(\alpha) = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(bc + ad)}\ .$$

Also gilt:

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\,\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(bc + ad)},$$

$$f^2 = a^2 + d^2 - ad\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{bc + ad},$$

$$f^2 = \frac{a^2bc + a^3d + bcd^2 + ad^3 - a^3d - ad^3 + ab^2d + ac^2d}{bc + ad},$$

$$(6.1)\quad f^2 = \frac{bc(a^2 + d^2) + ad(b^2 + c^2)}{bc + ad}.$$

Es folgt durch Analogie für die andere Diagonale:

(6.2) $e^2 = \dfrac{ab(d^2+c^2)+cd(a^2+b^2)}{ab+cd}$.

Jetzt könnte man $e^2 : f^2$ und danach $e : f$ berechnen. Allerdings erfordert die Umformung auf den unten gegebenen Ausdruck bei dieser Darstellung etwas Geschick, insbesondere dann, wenn man das Ergebnis nicht schon vorher kennt (siehe Anmerkung unten).

Gottlob Frege klammert diesen Rechenweg ein und verfolgt nun einen anderen Ansatz, der ihm einfacher zu sein scheint, aber mehr Vorkenntnisse erfordert.

Man braucht dazu folgende Formel für ein Dreieck mit den Seiten *a, b, c* und dem Umkreisradius *r* [1: S. 180]:

$$F_\Delta = \frac{abc}{4r}.$$

Das Sehnenviereck wird nun in zwei Dreiecke mit der gemeinsamen Seite *f* und in zwei Dreiecke mit der gemeinsamen Seite *e* zerlegt, die alle den gleichen Umkreis mit dem Radius *R* haben und deren Flächen jeweils zusammen die Fläche des Sehnenvierecks ergeben (siehe Abb. 8.1). Dann folgt

$$\frac{bcf}{4R} + \frac{adf}{4R} = \frac{abe}{4R} + \frac{cde}{4R}$$

$$f(bc+ad) = e(ab+cd).$$

Das Ergebnis lautet also

(6.3) $f : e = (ab+cd) : (bc+ad)$.

Anmerkungen des Autors:

1. Klammert man in den Ausdrücken (6.1) und (6.2) für f^2 und e^2 in der Lösung zu Aufgabe 6 anders aus, erhält man

$$f^2 = \frac{ab(ac+bd)+cd(bd+ac)}{bc+ad} = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+ad},$$

$$e^2 = \frac{bc(ac+bd)+ad(bd+ac)}{ab+cd} = \frac{(bc+ad)(ac+bd)}{ab+cd}$$

und

$$\left(\frac{f}{e}\right)^2 = \frac{f^2}{e^2} = \frac{(ab+cd)^2}{(bc+ad)^2} = \left(\frac{ab+cd}{bc+ad}\right)^2.$$

Nach dem Wurzelziehen hat man das gewünschte Ergebnis.

2. Unter Beachtung der Anmerkungen zu Aufgabe 8 kann man noch auf Sonderfälle eingehen. Sind bei einem Sehnenviereck zwei gegenüberliegende Seiten gleich (z.B. $b = d$), so liegt ein Trapez mit $f = e$ vor. Sind jeweils die gegenüberliegenden Seiten gleich ($a = c, b = d$), so entsteht ein Rechteck und es gilt offensichtlich $f = e$. Sind bei einem Sehnenviereck jeweils die angrenzende Seiten gleich (z. B. $a = b, c = d$), so ist das Diagonalenverhältnis

$$\frac{f}{e} = \frac{a^2+c^2}{2ac}.$$

Beispiel. Wir benutzen die Daten des ersten Beispiels zu Aufgabe 8 auch für Aufgabe 6, d.h. die Seitenlängen $a = 8, b = 5, c = 10, d = 9$. Nach Formel (6.3) ist das Verhältnis der Diagonalen im Sehnenviereck dann

$$\frac{f}{e} = \frac{40+90}{50+72} = \frac{130}{122} = \frac{65}{61} \approx 1{,}07.$$

Nach den obigen Formeln (6.1) und (6.2) erhält man

$$f^2 = \frac{50 \cdot 145 + 72 \cdot 125}{122} = \frac{8125}{61}, f \approx 11{,}54$$

$$e^2 = \frac{40 \cdot 181 + 90 \cdot 89}{130} = \frac{1525}{13}, e \approx 10{,}83$$

und

$$(ac+bd)^2 = 125^2 = 15625 = \frac{1525}{13} \cdot \frac{8125}{61} = e^2 \cdot f^2 = (e \cdot f)^2.$$

Daher gilt wie erwartet die Formel von Ptolemäus.

VI. Aufgabe 10.

Die Seiten eines Dreiecks sind zu berechnen, wenn zwei Winkel und der Halbmesser (Radius) ρ des eingeschriebenen Kreises (Inkreises) gegeben sind.

Beispiel: $\alpha = 50^o\ 12'\ 25''$, $\beta = 74^o\ 4'\ 40''$, $\rho = 250$ Fuß.

Lösung:

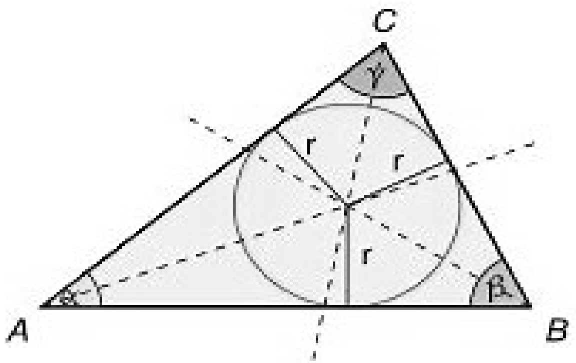

Abb. 10.1: Dreieck mit Inkreis (bei Frege Skizze)

Gesuchte Seiten: $\overline{AB} = c,\ \overline{BC} = a,\ \overline{AC} = b.$

Wenn zwei Winkel im Dreieck gegeben sind, dann kennt man alle drei Winkel α, β, γ wegen $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$.

Der Mittelpunkt des Inkreises ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Dreiecks (siehe Abb. 10.1). Wir setzen für den Inkreisradius $r = \rho$. Dann ist

$$\overline{AC} = b = \rho\ \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \rho\ \cot\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \rho\ \left[\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right],$$

$$\text{d.h. } b = \rho\left[\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\right].$$

Nach Bruchaddition und Anwendung eines Additionstheorems [1: S. 354] ergibt sich

$$b = \rho\left[\frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\right] = \rho\ \frac{\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

Analog gilt

$$a = \rho\left[\cot\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right] = \rho\ \frac{\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)},$$

$$(10c)\quad \boldsymbol{c} = \rho\left[\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cot\left(\frac{\beta}{2}\right)\right] = \boldsymbol{\rho}\ \frac{\mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{2}}\right)}{\mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}\right)\mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{2}}\right)}.$$

Dann fällt Gottlob wegen der konstanten Winkelsumme im Dreieck noch eine Umformung ein, die das Ergebnis nicht einfacher macht, allerdings für alle drei Seiten nur noch die gleichen zwei der drei Winkel enthält:

$$(10a)\ \ \boldsymbol{a} = \rho\, \frac{\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \boldsymbol{\rho}\, \frac{\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}\right)}{\mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{2}}\right)\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{2}}\right)}\ ,$$

$$(10b)\ \ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\rho}\, \frac{\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{2}}\right)}{\mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}\right)\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{2}}\right)}\ .$$

Für c wird die vorher abgeleitete (und daher fett gesetzte) Formel (10c) zur Berechnung genutzt.

Beispiel. Gegeben sind

Winkel $\alpha = 50^o\ 12'\ 25''$ (alte Unterteilung in Minuten und Sekunden, heute dezimale Unterteilung üblich: $\alpha \approx 50{,}2^o$),

Winkel $\beta = 74^o\ 4'\ 40''$ (heute: β $\approx 74{,}1^o$),

Inkreisradius $\rho = 250$ (Fuß).

Berechnung der Winkel, die in den Formeln (10c), (10a) und (10b) auftreten:

$$\alpha + \beta = 124^o\ 17'\ 5''(\alpha+\beta \approx 124{,}3^o \Rightarrow \gamma = 55^o 42' 35'' \approx 55{,}7^o),$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 62^o\ 8'\ 32{,}5''\ \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \approx 62{,}14^o\right),$$

$$\frac{\alpha}{2} = 25^o\ 6'\ 12{,}5''\ \ \left(\frac{\alpha}{2} \approx 25{,}10^o\right),$$

$$\frac{\beta}{2} = 37^o\ 2'\ 20''\ \left(\frac{\beta}{2} \approx 37{,}04^o\right).$$

Hinweis 1. Heute würde man zur Berechnung der Seiten den Taschenrechner verwenden. Damals war man auf Tafeln angewiesen (siehe z.B. [2]). Dabei wurde oft noch zur Erhöhung der Genauigkeit zwischen benachbarten Tafelwerten linear interpoliert.

Hinweis 2. Aus den Tafeln können Logarithmen und Werte trigonometrischer Funktionen abgelesen werden. Logarithmieren liefert z.B. für a nach Formel $(10a)$ unter Beachtung der Logarithmengesetze:

$$\log(a) = \log(\rho) + \log\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] - \log\left[\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right] - \log\left[\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]$$

(log ist hier der Logarithmus zur Basis 10, heute meist mit lg bezeichnet).

Die Logarithmen der Kosinus- und Sinusfunktionen sind i. Allg. negativ. Da negative Vorzeichen in Tafeln vermieden wurden, addierte man z.B. die Basis 10 dazu, um sie später dann wieder zu subtrahieren. Damit die Schreibung nicht zu umständlich wird, verzichte ich hier meist auf die Argumentklammerung bei Funktionen.

Seite *a*

$$\log a = \left(\log\rho + \left(10 + \log\cos\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$
$$-\left(\left(10 + \log\sin\frac{\beta}{2}\right) + \left(10 + \log\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - 10\right)$$

Abkürzungen: $\mathrm{lc}(.) \coloneqq 10 + \log\cos\frac{.}{2}$, $\mathrm{ls}(.) \coloneqq 10 + \log\sin\frac{.}{2}$ (. Leerstelle)

$$\log a = \log\rho + \mathrm{lc}(\alpha) - (\mathrm{ls}(\beta) + \mathrm{lc}(\alpha+\beta))$$

$\log\rho = 2{,}3979400$ (8-stellig!)

$\mathrm{lc}(\alpha) = 9{,}9569093$, $\mathrm{ls}(\beta) = 9{,}7798539$, $\mathrm{lc}(\alpha+\beta) = 9{,}6695737$

Abkürzungen: $sa := \log\rho + \mathrm{lc}(\alpha)$, $ta \coloneqq \mathrm{ls}(\beta) + \mathrm{lc}(\alpha+\beta) - 10$

$sa = 12{,}3548493, \qquad ta = 9{,}4494276$

$\log a = sa - ta = 2{,}9054217$, $\boldsymbol{a} = \mathbf{804{,}3067}$ (Fuß).

Seite *b*

Aus Formel (10b) folgt (Abkürzungen: siehe unter Seite a)

$$\log b = \log\rho + \mathrm{lc}(\beta) - (\mathrm{ls}(\alpha) + \mathrm{lc}(\alpha+\beta))$$

$\log\rho = 2{,}3979400$

$\mathrm{ls}(\alpha) = 9{,}6276236$, $\mathrm{lc}(\beta) = 9{,}9021263$, $\mathrm{lc}(\alpha+\beta) = 9{,}6695737$

$sb := \log\rho + \mathrm{lc}(\beta) = 12{,}3000663$

$tb \coloneqq \mathrm{ls}(\alpha) + \mathrm{lc}(\alpha+\beta) - 10 = 9{,}2971973$

$\log b = sb - tb = 3{,}0028690$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{1006{,}63}$ (Fuß).

Seite *c*

Aus Formel $(10c)$ folgt (Abkürzungen: siehe unter Seite a)

$$\log c = \log \rho + \mathrm{ls}(\alpha+\beta) - (\mathrm{ls}(\alpha) + \mathrm{ls}(\beta)$$

$$\log \rho = 2{,}3979400$$

$$\mathrm{ls}(\alpha) = 9{,}6276236,\ \mathrm{ls}(\beta) = 9{,}7798539,\ \ \mathrm{ls}(\alpha+\beta) = 9{,}9465069$$

$$sc := \log \rho + \mathrm{ls}(\alpha+\beta) = 12{,}3444469$$

$$tc := \mathrm{ls}(\alpha) + \mathrm{ls}(\beta) - 10 = 9{,}4074775$$

$$\log c = sc - tc = 2{,}9369694\ ,\ \boldsymbol{c = 864{,}907}\ \text{(Fuß).}$$

Hinweis 3. Bei der Bestimmung der Seite *c* hat sich Gottlob in den hinteren Stellen leicht verrechnet. Dr. Sievert korrigierte diese Stellen. Das ist aber unbedeutend, zumal auch beim akkuraten Rechnen mit Hilfe von Tafeln oder Taschenrechner kleine Rundungsfehler entstehen.

Anmerkungen des Autors:

1. Kennt man schon eine Seite des Dreiecks, z.B. wie vorn die Seite b, kann man a auch mit Hilfe des Sinussatzes ausrechen [1: S. 177]:

$$a = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}\, b\ .$$

Die dritte Seite *c* lässt sich dann erneut mit dem Sinussatz oder auch mit dem Kosinussatz bestimmen [1: S. 177]:

$$c = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\beta)}\, b\ \ \text{bzw.}\ \ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)\ .$$

2. Bei dieser Aufgabe muss die Summe der beiden gegebenen Winkel kleiner als 180^o sein. Der Inkreisradius $\rho > 0$ ist beliebig wählbar. Ansonsten gibt es keine weiteren Beschränkungen für die Lösbarkeit.

5. Lösungen der restlichen Aufgaben

Gottlob Freges Mitschüler Wolfgang Baumann, der im Mathematikabitur ähnlich gut abschnitt, bearbeitete sogar 8 Aufgaben. Davon waren 6 richtig gelöst (und zwar die Aufgaben 1, 2, 3, 4, 9 und 10), während Aufgabe 11 nicht zu Ende geführt wurde und Aufgabe 12 fehlerhaft war. Auch hier fehlten Erläuterungen zu den Rechenschritten und Ergebnissen. Ich folge bei den Lösungen aber meiner Systematik und verweise nur gelegentlich auf Baumanns Arbeit.

Aufgabe 1.

Jemand zahlt am Anfang seines 45. Jahres 4000 Mark bei einer Altersversicherungsgesellschaft ein, um vom 65. Jahre ab eine am Schlusse jeden Jahres zahlbare Pension von 630 Mark zu beziehen. Wieviel Jahre kann er dieselbe erhalten, wenn die Gesellschaft das Geld [von Anfang an jährlich] zu $3\,\frac{1}{2}$ Prozent benutzt [verzinst]?

Lösung: Das verzinste Guthaben (Kapital) beträgt nach *n* Jahren Laufzeit:

$$K_n = q^n K_0, q := 1 + \frac{p}{100}$$

Dabei ist K_0 das Startkapital, *p* die Verzinsung (in Prozent) und *q* der Zinsfaktor. Die nachschüssige Rentenzahlung (Pension) aus dem jeweiligen Guthaben ergibt nach *x* Jahren Laufzeit den Rentenendwert

$$R_x = \frac{R(q^x - 1)}{q - 1} = R(1 + q + \cdots + q^{x-1})$$

(einschließlich Zinseffekt). Hier ist *R* die Rentenhöhe, *q* der Zinsfaktor und *x* die Bezugsdauer der Rente [1: S. 90].

Hat man das Startkapital nun $n + x$ Jahre verzinst und die letzten *x* Jahre Rente (Pension) erhalten, ist das Restkapital

(10.1) $K_{\Delta,n,x} = K_{n+x} - R_x = q^x K_n - R_x = q^{n+x} K_0 - \dfrac{R(q^x - 1)}{q - 1}$.

Nun ist die Laufzeit x unter der Bedingung gesucht, dass das Restkapital aufgebraucht ist. Daher ist die Gleichung $K_{\Delta,n,x} = 0$ nach x umzustellen. Das gelingt durch die folgenden Umformungen

$$q^n\, q^x\, K_0\,(q-1) = R\,q - R\,,$$

$$q^x \left(R - p^n\, K_0\,(q-1)\right) = R\,,$$

$$q^x = \frac{R}{R - q^n\, K_0\,(q-1)}\,,$$

$$x = \frac{\log(R) - \log(R - q^n\, K_0\,(q-1))}{\log(q)}\,.$$

Dabei ist log der Logarithmus zu einer beliebigen Basis.

Die konkreten Daten in der Aufgabe sind:

$K_0 = 4000$ Mark, $R = 630$ Mark,

Zinssatz $p = 3{,}5$ %, d.h. $q = 1{,}035$,

$n = 20$ Jahre.

Die gesuchte Bezugsdauer x ist dann ebenfalls in Jahren gemessen. Stehen keine Taschenrechner zur Verfügung, ist die Potenz q^n im Produkt $q^n\, K_0\,(q-1)$ logarithmisch zu berechnen.

Es ergibt sich $1{,}035^{20} \approx 2$ und

$$x = \frac{\log(630) - \log(630 - 1{,}035^{20} \cdot 4000 \cdot\ 0{,}035)}{\lg(1{,}035)}$$

$$\approx \frac{\log(630) - \log(350)}{\log(1{,}035)} = \frac{\log(1{,}8)}{\log(1{,}035)} \approx 17\,.$$

Ergebnis: Die Rente wird also etwa 17 Jahre lang gezahlt.

Bemerkungen:

1. Diese Aufgabe wird z.B. vom Abiturienten Heinrich Baumann gelöst. Obwohl die Aufgabe konkrete Vorgaben enthält, stellt Baumann wie oben die allgemeine Formel (nur mit anderen Bezeichnungen) zunächst nach x um und setzt danach die konkreten Vorgaben ein. Wie schon bei anderen Lösungen ersichtlich, ist im Unterricht wohl darauf Wert gelegt worden, auch die abstraktere Ebene der algebraischen Umformungen zu beherrschen.

2. Das angesparte Kapital nach 20 Jahren ist

$$K_{20} = 4000 \cdot 1{,}035^{20} = 7959{,}16 \text{ [Mark]}$$

Ohne den Zinseffekt könnte man nicht einmal 12 Jahre lang 630 Mark jährlich entnehmen.

3. Der Ausdruck (10.1) hat als Funktion von $x \geq 0$ die Gestalt

$$f(x) = C - Dq^x, C := \frac{R}{q-1}, D := C - K_n, R > 0, q > 1\,.$$

Für die konkreten Daten ist auch $D > 0$. Die Funktion ist zunächst positiv und streng monoton fallend. In der Aufgabe ist die Nullstelle gesucht. Eine tabellarische oder graphische Darstellung zeigt die Wertentwicklung des Restkapitals im Laufe der Jahre.

4. Obwohl q^x für $q > 1$ exponentiell wächst, erreicht x für $q = 1{,}035 \approx 1$ den Schwellenwert 1,8 erst bei etwa 17.

5. Heute wäre eine Rente von 630 € im Jahr vielleicht ausreichend, um die Weihnachtsgeschenke zu finanzieren.

Aufgabe 4.

Aus $\frac{4}{y^2} + \frac{4+y}{y} = \frac{8+4y}{x} + \frac{12y^2}{x^2}$ und $4y^2 - xy = x$ folgt $x = ?\, y = ?$

[Heute: Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\frac{4}{y^2} + \frac{4+y}{y} = \frac{8+4y}{x} + \frac{12y^2}{x^2}, \qquad 4y^2 - xy = x\,.]$$

Lösung:

Zunächst sind $x = 0$ und $y = 0$ als Lösungen ausgeschlossen. In der ersten Gleichung

$$\frac{4}{y^2} + \frac{4+y}{y} = \frac{8+4y}{x} + \frac{12\,y^2}{x^2}$$

kann man die linke Seite wie folgt umformen:

$$\frac{4}{y^2}+\frac{4+y}{y}=\frac{4+4y+y^2}{y^2}=\left(\frac{2+y}{y}\right)^2.$$

Die zweite Gleichung

$$4\,y^2-xy=x$$

wird nach *x* aufgelöst:

$$4\,y^2=xy+x=x(y+1),\qquad x=\frac{4\,y^2}{1+y}.$$

Setzt man diesen Ausdruck für *x* in die rechte Seite der ersten Gleichung ein, folgt

$$\frac{4(2+y)(1+y)}{4y^2}+\frac{12\,y^2(1+y)^2}{16y^4}=\frac{(2+y)(1+y)}{y^2}+\frac{3\,(1+y)^2}{4y^2}$$

$$=\frac{2+y}{y}\cdot\frac{1+y}{y}+\frac{3}{4}\left(\frac{1+y}{y}\right)^2.$$

Dieses Ergebnis legt die Substitutionen

$$z:=\frac{2+y}{y}\,,\qquad p:=\frac{1+y}{y}$$

nahe. Die transformierte erste Gleichung lautet damit

$$z^2=z\,p+\frac{3}{4}\,p^2$$

oder in der Normalform einer quadratischen Gleichung

$$z^2-z\,p-\frac{3}{4}\,p^2=0$$

mit der Auflösung

$$z_{1,2}=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+\frac{3}{4}\,p^2}=\frac{p}{2}\pm p.$$

Hierbei ist zu beachten, dass zunächst $\sqrt{p^2}=|p|$ ist, aber $\{p,-p\}=\{|p|,-|p|\}$ gilt.

Weiter ergibt sich

$$z_1=\frac{p}{2}+p=\frac{3}{2}\,p\;\Rightarrow\;\frac{2+y_1}{y_1}=\frac{3}{2}\,\frac{1+y_1}{y_1},$$

$$4+2y_1=3+3y_1\;\Rightarrow\;y_1=1,\;\;x_1=\frac{4\,y_1^2}{y_1+1}=2$$

sowie

$$z_2 = \frac{p}{2} - p = -\frac{1}{2}\,p \;\Rightarrow\; \frac{2+y_2}{y_2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1+y_2}{y_2},$$

$$-4 - 2y_2 = 1 + y_2 \;\Rightarrow\; y_2 = -\frac{5}{3},\;\; x_2 = \frac{4\,y_2^2}{y_2+1} = -\frac{50}{3}\,.$$

Es gibt also zwei Lösungspaare

$$(x_1, y_1) = (2, 1), \qquad (x_2, y_2) = \left(-\frac{50}{3}, -\frac{5}{3}\right).$$

Wer will, kann noch die Probe machen und in die Ausgangsgleichungen einsetzen.

Nachbemerkung: Der Lösungsansatz entspricht in etwa dem des Abiturienten Baumann. Er liegt nicht auf der Hand, besonders unter dem Zeitdruck der Abiturklausur. Andere Versuche zur Elimination einer der beiden Größen *x*, *y* führen bei Ungeschicklichkeit leicht auf Gleichungen höheren Grades, bei deren Lösung man ohne CAS (Computer-Algebra) überfordert ist.

Alternativlösung: Geometrisch entsprechen den beiden Gleichungen Kurven in der *x*-*y*-Ebene. Das Ergebnis zeigt, dass diese Kurven sich in den beiden Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) schneiden. Der erste Punkt liegt im ersten Quadranten, der zweite im dritten Quadranten. Da die zweite Gleichung leicht nach *x* auflösbar ist (siehe oben), wollen wir es mit der ersten auch versuchen. Verwenden wir die Umformung der linken Seite oben und bringen die beiden Brüche der rechten Seite auf einen Nenner, erhält man

$$\left(\frac{2+y}{y}\right)^2 = 4\,\frac{x(2+y) + 3\,y^2}{x^2}\,.$$

Das liefert (nach Kürzen von $2+y$ im Vorfaktor von *x*) die folgende quadratische Gleichung in *x*:

$$x^2 - \frac{4y^2}{2+y}\,x - \frac{12y^4}{(2+y)^2} = 0.$$

Die Auflösung nach *x* führt auf

$$x = f_{1,2}(y) := \frac{2y^2}{2+y} \pm \frac{4y^2}{2+y} = \frac{2y^2}{2+y} \ (1 \pm 2),$$

woraus sich zwei Kurvenzweige ergeben. Setzt man dieses x mit dem x aus der zweiten Gleichung

$$x = g(y) := \frac{4\,y^2}{1+y}$$

gleich ($f_{1,2}(y) = g(y)$), ergeben sich nach Kürzen von y^2, die schon bestimmten Lösungen (x_1, y_1) und (x_2, y_2). Bei dieser Methode werden keine Substitutionen benötigt. Außerdem kann man die zu den Gleichungen gehörenden Kurven geometrisch darstellen.

Aufgabe 7.

Zeigen Sie: In jedem Paralleltrapez [heute: Trapez] ist die Summe der Quadrate über den Diagonalen gleich der Summe der Quadrate über den nicht parallelen Seiten vermehrt um das doppelte Rechteck aus den parallelen Seiten.

Variante 1: Geometrisch-trigonometrische Lösung

Benötigt wird vor allem der *Kosinus-Satz* für beliebige Dreiecke.

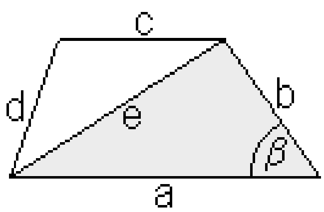

Abb. 7.1: Trapez mit Seiten a, b, c, d, Diagonale e und Winkel β

Gegeben ist ein (nichtentartetes) Trapez, von dem wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit das Längenverhältnis $a > c$ annehmen (siehe Abb. 7.1). Die Behauptung der Aufgabe lautet dann

(7.1) $e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac,$

wenn die andere Diagonale des Trapezes mit f bezeichnet wird. Die Diagonale e teilt das Trapez in zwei Dreiecke. Im dunkler gefärbten Dreieck aus Abb. 7.1 ergibt sich das Quadrat von e aus dem Kosinus-Satz wie folgt:

(7.2) $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\beta)$.

Nun wird die Seite d parallel nach rechts verschoben, so dass der obere Endpunkt von d in den oberen Dreieckspunkt gelangt. So entsteht im Trapez ein neues Teildreieck (siehe Abb. 7.2):

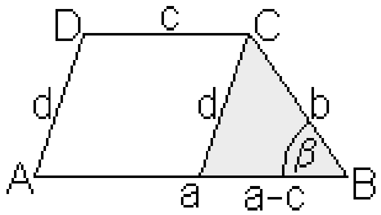

Abb. 7.2: Trapez mit Seiten a, b, c, d, parallel verschobener Seite d und Winkel β

In diesem dunkler gefärbten Teildreieck wird wieder der Kosinus-Satz angewendet:

$$d^2 = (a-c)^2 + b^2 - 2(a-c)b\cos(\beta).$$

Die Auflösung dieser Gleichung nach $\cos\beta$ ergibt:

$$\cos(\beta) = \frac{(a-c)^2 + b^2 - d^2}{2(a-c)b} = \frac{a^2 - 2ac + b^2 + c^2 - d^2}{2(a-c)b}.$$

Man beachte, dass wegen der Voraussetzung $a > c$ der Nenner ungleich 0 ist.

Dieser Ausdruck für $\cos(\beta)$ wird in die Gleichung (7.2) eingesetzt, wobei gleich $2b$ gekürzt wird:

$$e^2 = a^2 + b^2 - a\,\frac{a^2 - 2ac + b^2 + c^2 - d^2}{a-c}$$

$$= \frac{a(d^2 - c^2) - c(b^2 - a^2)}{a-c}.$$

Analog gewinnt man für das Quadrat der Diagonale f

$$f^2 = \frac{a(b^2 - c^2) - c(d^2 - a^2)}{a-c}.$$

Die Addition beider Gleichungen liefert:

$$e^2 + f^2 = \frac{a(b^2 + d^2 - 2c^2) - c(b^2 + d^2 - 2a^2)}{a - c}$$

$$= \frac{(a - c)(b^2 + d^2) + 2ac(a - c)}{a - c} = b^2 + d^2 + 2ac\,.$$

Das ist die Behauptung (7.1).

Variante 2: Lösung mit Vektorrechnung (Lineare Algebra)

Zur Vektorrechnung kann man sich z.B. in [6, Kapitel 3] informieren. Insbesondere sind dort die Abschnitte 3.5 und 3.10 relevant. Wir orientieren die Seitenvektoren so, dass gilt (vgl. Abb. 7.2):

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \vec{c} = \overrightarrow{CD}, \vec{d} = \overrightarrow{DA}.$$

Die Summe der Seitenvektoren ist dann der Nullvektor:

(7.3) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}\,.$

Die Diagonalvektoren sind Summen der Seitenvektoren. Mit

$$\vec{e} = \vec{a} + \vec{b}, \qquad \vec{f} = \vec{a} + \vec{d}$$

legen wir ihre Richtung fest. Nun gilt mit dem Skalarprodukt $<.,.>$:

$$e^2 = <\vec{e}, \vec{e}> = <\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}> = a^2 + b^2 + 2 <\vec{a}, \vec{b}>,$$

$$f^2 = <\vec{f}, \vec{f}> = <\vec{a} + \vec{d}, \vec{a} + \vec{d}> = a^2 + d^2 + 2 <\vec{a}, \vec{d}>.$$

Die Addition dieser Gleichungen ergibt

$$e^2 + f^2 = 2a^2 + b^2 + d^2 + 2 <\vec{a}, \vec{b} + \vec{d}>.$$

Wegen (7.3) folgt

$$e^2 + f^2 = 2a^2 + b^2 + d^2 - 2 <\vec{a}, \vec{a} + \vec{c}> = b^2 + d^2 - 2 <\vec{a}, \vec{c}>.$$

Da die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ parallel und entgegengesetzt gerichtet sind, ergibt sich mit

$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac$$

schon die Behauptung (7.1).

Nachtrag: Was passiert für $a = c$? Dann ist das Trapez ein Parallelogramm, wie man leicht sieht. Das bedeutet auch $b = d$ (siehe Abb. 7.3).

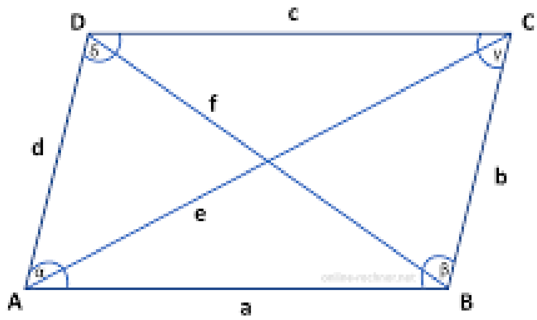

Abb. 7.3: Parallelogramm mit Seiten a, b, c, d, Diagonalen e, f und Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

Lösungsvariante 1 (Parallelogramm):

Wir übernehmen für die Diagonale e die Formel (7.2), nämlich:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\beta).$$

Die weiteren Herleitungen sind jetzt nicht mehr anwendbar. Die Parallelverschiebung der Seite d liefert kein Dreieck und in den Formeln ist eine Division durch $a - c$ nicht mehr möglich.

Für die Diagonale f gilt analog

(7.4) $f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha)$.

Nun ist aber $\alpha + \beta = 180°$ und damit $\cos(\alpha) = -\cos(\beta)$. Daher liefert die Addition der Gleichungen (7.2) und (7.4) das Ergebnis

$$e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Das ergibt sich auch aus der Behauptung (7.1), wenn man dort $a = c$ und $b = d$ setzt. Daher kann man prinzipiell auch die ursprüngliche Lösungsvariante nutzen ($a > c$) und zum Schluss den Grenzübergang $c \to a$ durchführen, der dann auch $d \to b$ zur Folge hat.

Lösungsvariante 2 (Parallelogramm):

Hier ist $a = c$ von vornherein zulässig. Man muss also nur spezifizieren. In der Vektorgleichung (7.3) ist dann $\vec{a} = -\vec{c}$ zu setzen, woraus sofort $\vec{b} = -\vec{d}$ und $b = d$ folgt. Das liefert schon die Behauptung

$$e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Aufgabe 9.

Die Höhe eines Thurmes beträgt $a = 150$ Fuß und seine Entfernung von dem Ufer eines Stromes $b = 300$ Fuß. Wie groß ist die Breite desselben, wenn sie von der Spitze des Thurmes unter einem Winkel $\beta = 14^o\ 59'\ 58{,}9''$ erscheint?

Lösung:

Wir nehmen an, dass der Turm rechts vom Ufer des Stromes steht. Wir bezeichnen den Fußpunkt des Turmes mit C und dessen Spitze mit D. Die Bodenlinie führt von C zunächst zum rechten Uferpunkt B des Stromes und schließlich zum linken Uferpunkt A. Wir betrachten die beiden rechtwinkligen Dreiecke ACD und BCD. Gegeben sind die Turmhöhe $a = \overline{\mathrm{CD}}$ und die Entfernung $b = \overline{\mathrm{BC}}$ vom Turmfuß zum Stromufer. Weiter kennt man den Winkel $\beta = \angle\,\mathrm{ADB}$, unter dem die gesuchte Strombreite $x = \overline{\mathrm{AB}}$ von der Turmspitze D aus zu sehen ist (siehe Abb. 9.1).

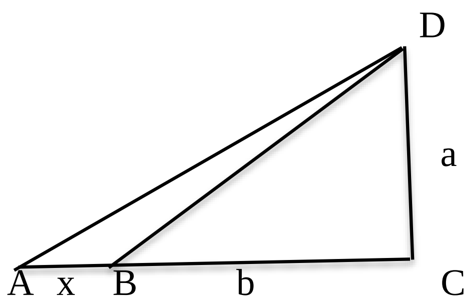

Abb. 9.1: Strombreite *x*

Wir führen noch den Winkel $\gamma = \angle\,\mathrm{BDC}$ ein. Dann gilt

$$(9.1)\quad \tan(\gamma) = \frac{b}{a} \quad \text{bzw.} \quad \gamma = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right),$$

$$\frac{x+b}{a} = \tan\ (\beta+\gamma).$$

Das bedeutet für die Strombreite

(9.2) $x = a \tan\ (\beta+\gamma) - b$.

Die konkreten Vorgaben sind:

$$a = 150 \text{ Fuß}, b = 300 \text{ Fuß}, \beta = 14°\, 59'\, 58{,}9''.$$

In dezimaler Notation erhält man für den Winkel

$$\beta = \left(14 + \frac{59}{60} + \frac{58{,}9}{3600}\right)^{o} = 14.9997^{o} \ldots \approx 15^{o} \triangleq \frac{\pi}{12} \approx 0{,}2618.$$

Im Weiteren verwenden wir das Bogenmaß für die Winkel. Dann ist wegen (9.1)

$$\gamma = \tan^{-1}(2) \approx 1{,}1071, \qquad \beta+\gamma \approx 1{,}369$$

und wegen (9.2)

$$x \approx 150 \tan(1{,}369) - 300 \approx 433.$$

Ergebnis: Die Breite des Stromes beträgt etwa 433 Fuß.

Hinweis: Im Deutschen wird die Umkehrfunktion $\tan^{-1}(x)$ des Tangens oft Arkustangens genannt und mit $\arctan(x)$ bezeichnet.

Kommentar: Das Ergebnis kann schwanken, je nachdem, wie genau und mit welchen Formeln gerechnet wird. In der obigen Lösungsformel verstärkt die Tangensfunktion in Verbindung mit dem großen Faktor 150 den Winkelfehler. Deshalb haben wir hier auf ganze Fuß gerundet.

Es gibt viele weitere Lösungsvarianten. Der Abiturient *Baumann* hat z.B. den heute in der Schule kaum noch verwendeten *Tangenssatz* zur Lösung eingesetzt [1: S. 177]:

$$\frac{b+a}{b-a} = \frac{\tan\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}.$$

Dabei sind $\alpha = \angle CBD$ und $\gamma = \angle \mathrm{BDC}$ die den Seiten a und b gegenüber liegenden Winkel im Dreieck BCD (siehe Abb. 9.1). Da es rechtwinklig ist, gilt auch $\gamma + \alpha = 90°$. Aufgrund der Vorgaben folgt

$$\tan\ \left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right) = \frac{1}{3}\tan(45°) = \frac{1}{3}.$$

Das bedeutet $\gamma - \alpha \approx 36{,}87°$. Wegen $\gamma + \alpha = 90°$ heißt das $\gamma \approx 63{,}435°$.

Der Winkel $\angle ADC$ im Dreieck ACD beträgt dann $\beta + \gamma \approx 78{,}435°$. Weiter folgt nach (9.2)

$$x = a \tan\ (\beta + \gamma) - b \approx 150 \tan 78{,}435° - 300 \approx 433.$$

Arbeitet man zunächst mit dem rechtwinkligen Dreieck BCD und anschließend mit dem schiefwinkligen Dreieck ABD (siehe Abb. 9.1), dann folgt mit dem *Satz des Pythagoras* und dem *Sinussatz* die Formel

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}\ \frac{\sin(\beta)}{\sin(90° - \beta - \gamma)} = \sqrt{a^2 + b^2}\ \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta + \gamma)}\,.$$

Sie ist etwas komplizierter als die Formel der ersten Lösung.

Aufgabe 11.

Aus dem Inhalte [d.h. dem Volumen] *I* und der Oberfläche *F* eines geraden Kegels [genauer: Kreiskegels] ist die Höhe *h* zu bestimmen.

Lösung:

Gegeben ist der Inhalt (das Volumen) *I* und die Oberfläche *F* eines geraden Kreiskegels (siehe Abb. 11.1). Dabei setzt sich *F* aus der Mantelfläche *M* und der Grundfläche *G* zusammen. Die Formeln lauten:

(11.1) $I = I(r, h) = \frac{1}{3} Gh = \frac{1}{3}\ \pi r^2 h\,,$

(11.2) $F = G + M = \pi r^2 + \pi r s = \pi r\ (r + s).$

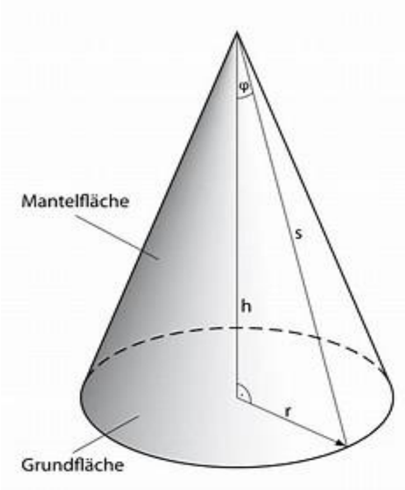

Abb.11.1: Gerader Kreiskegel mit dem Radius *r* und der Höhe *h*

Dabei ist r der Radius des Grundkreises, h die Höhe und s die Länge der Mantellinie des Kegels. Für diese gilt nach dem *Satz des Pythagoras* wiederum

(11.3) $s^2 = r^2 + h^2$.

Somit erhält man

$$F = F(r,h) = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2} = \pi r^2 + \sqrt{\pi^2 r^4 + \pi^2 r^2 h^2}\,.$$

Da I und F gegeben sind, hat man zwei nichtlineare Gleichungen mit den zwei Unbekannten r und h, wobei hier nur h gesucht ist. Es zeigt sich aber, dass man parallel zu h auch jederzeit r ermitteln kann. Zur Vereinfachung führen wir die neue Größe

(11.4) $z := G = \pi r^2 > 0$

ein. Aus der Gleichung (11.1) ergibt sich dann

(11.5) $h = \dfrac{3I}{z}$ bzw. $z = \dfrac{3I}{h}$.

Die Gleichung (11.2) lautet unter Beachtung von (11.4) und (11.5):

$$F = z + \sqrt{z^2 + \pi z h^2} = z + \sqrt{z^2 + \frac{9\pi I^2}{z}}.$$

Jetzt wollen wir nach z auflösen, um danach auch h zu ermitteln. Bringt man z von der rechten auf die linke Seite und quadriert, folgen

$$(F-z)^2 = z^2 + \frac{9\pi I^2}{z}$$

und

$$F^2 - 2Fz = \frac{9\pi I^2}{z}.$$

Nach Multiplikation mit *z* entsteht eine quadratische Gleichung in *z*, die noch auf Normalform gebracht wird:

(11.6) $z^2 - \frac{1}{2}F\,z + \frac{9\pi I^2}{2F} = 0.$

Daraus ergibt sich nach der Lösungsformel

$$z_{1,2} = \frac{1}{4}\,F \pm \sqrt{\frac{1}{16}F^2 - \frac{9\pi I^2}{2F}} = \frac{1}{4}\,F\left(1 \pm \sqrt{D}\right)$$

mit dem Radikanden

(11.7) $D := \frac{F^3 - 72\pi I^2}{F^3} = 1 - 72\pi\frac{I^2}{F^3}.$

Wegen (11.5) ist außerdem

$$h_{1,2} = \frac{3I}{z_{1,2}}.$$

Einen anderen Ausdruck für *h* bekommt man, wenn man *z* gemäß (11.5) in (11.6) durch *h* ersetzt:

$$\frac{9I^2}{h^2} - \frac{1}{2}F\frac{3I}{h} + \frac{9\pi I^2}{2F} = 0.$$

Nach Multiplikation mit $2Fh^2$ und Division durch $2\pi I^2$ erhält man die quadratische Gleichung

$$h^2 - \frac{F}{3\pi I}h + \frac{2F}{\pi} = 0$$

in *h*. Die Lösungsformel ergibt nach einer kleinen Umformung

$$h_{2,1} = \frac{1}{6\pi}\frac{F^2}{I}\left(1 \pm \sqrt{D}\right)$$

mit *D* aus (11.7). Die Indexvertauschung hängt damit zusammen, dass zu dem größeren *z* (bzw. *r*) das kleinere *h* gehört (siehe auch Kommentar und Beispiel 1 unten). Dabei tritt in $z_{1,2}$ und $h_{2,1}$ der gleiche Faktor $1 \pm \sqrt{D}$ auf. Man sieht leicht, dass mit den angegebenen Formeln für das Produkt tatsächlich die Relation $h_{1,2} z_{1,2} = 3I$ gilt.

Bemerkung: Der Radius *r*, die Mantelfläche *M* und die Mantellinienlänge *s* sind zwar nicht gefragt, sie fallen aber als Nebenprodukte ab:

$$r_{1,2} = \sqrt{\frac{z_{1,2}}{\pi}}\ , \quad M_{1,2} = F - z_{1,2}, \qquad s_{1,2} = \sqrt{r_{1,2}^2 + h_{1,2}^2}\ .$$

Kommentar: In der Aufgabe sind keine speziellen Werte für *I* und *F* angegeben. Es ist aber von vornherein klar, dass nicht beliebige Vorgaben möglich sind. Die Lösungsformeln für *z* und *h* zeigen, dass der Radikant *D* aus (11.7) nichtnegativ sein muss, wobei für $D > 0$ zwei Lösungen (zwei Kegel) existieren. Für $D = 0$, d.h. für Vorgaben *I* und *F* mit

$$F^3 = 72\pi I^2 \ \text{ bzw. } \left(\frac{F}{2}\right)^3 = \pi(3I)^2$$

gibt es genau eine Lösung (einen Kegel). Dann gilt

$$z = z_1 = z_2 = \frac{1}{4}F, \qquad h = h_1 = h_2 = \frac{1}{6\pi}\frac{F^2}{I}.$$

Beispiel 1. Wir wählen $I = 12\pi\ \text{cm}^3$ und $F = 24\pi\ \text{cm}^2$. Dann ist $D > 0$ und

$$z_{1,2} = 6\pi\left(1 \pm \sqrt{1 - 72\pi\frac{12^2 \cdot \pi^2}{8 \cdot 12^3 \cdot \pi^3}}\right) = 6\pi\left(1 \pm \frac{1}{2}\right)\text{cm}^2,$$

d.h.

$$z_1 = 9\pi\ \text{cm}^2 \Rightarrow\ r_1 = 3\ \text{cm},\ h_1 = \frac{3I}{z_1} = 4\ \text{cm},$$

$$z_2 = 3\pi\ \text{cm}^2 \Rightarrow\ r_2 = \sqrt{3}\ \text{cm},\ h_2 = \frac{3I}{z_2} = 12\ \text{cm}.$$

Außerdem gilt

$$M_1 = 15\pi\ \text{cm}^2, s_1 = 5\ \text{cm und } M_2 = 21\pi\ \text{cm}^2, s_2 = 7\sqrt{3}\ \text{cm}.$$

Der erste Kegel ist breit und niedrig, der zweite schmal und hoch.

Beispiel 2. Wir wählen $I = \frac{1}{3}\pi\ \mathrm{cm}^3$ und $F = 2\pi\ \mathrm{cm}^2$. Dann ist $D = 0$ und die jeweiligen zwei Ergebnisse fallen zusammen:

$$z = \frac{1}{2}\pi\ \mathrm{cm}^2 \Rightarrow\ r = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ \mathrm{cm}, h = \frac{3I}{z} = 2\ \mathrm{cm}.$$

Schließlich gilt

$$M = \frac{3}{2}\pi\ \mathrm{cm}^2, s = \frac{3}{2}\sqrt{2}\ \mathrm{cm}.$$

Beispiel 3. Wenn man $I = \pi\ \mathrm{cm}^3$ und $F = \pi\ \mathrm{cm}^2$ wählt, dann ist $D < 0$. Es gibt keine reelle Lösung für z bzw. h, d.h., keinen Kegel, der die Vorgaben erfüllt.

Aufgabe 12.

Die Radien der Grundkreise eines abgekürzten geraden Kegels [heute: eines geraden Kreiskegelstumpfes] sind r und ρ, der Inhalt [d.h. das Volumen] desselben ist V. Wie groß ist [heute: sind] die Seite [gemeint ist die Länge der Mantellinie] und die Mantelfläche des abgekürzten Kegels?

(B.?? Mit Einführung eines Hilfswinkels.)

Beispiel. $r = 16{,}4$ Fuß, $\rho = 10{,}8$ Fuß, $V = 1648{,}72$ Cubikfuß.

Variante 1: Lösung ohne Trigonometrie

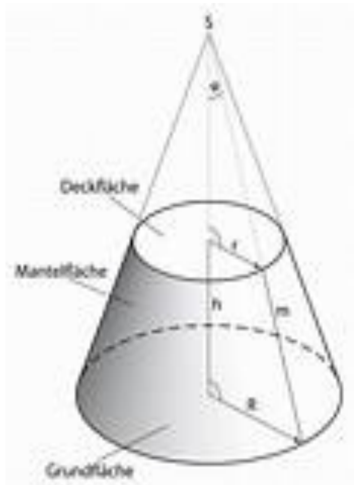

Abb. 12.1: Gerader Kreiskegelstumpf mit den Radien r, ρ und der Höhe h

Wir ignorieren hier den Hinweis über die Einführung eines Hilfswinkels.

Die Formeln für das Volumen *V* und die Mantelfläche *M* eines geraden Kreiskegelstumpfes mit den Radien $r \geq \rho \geq 0$ und der Höhe $h > 0$ lauten:

(12.1) $V = \pi\left[\left(\frac{r+\rho}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{r-\rho}{2}\right)^2\right] h = \frac{1}{3}\,\pi(r^2 + r\rho + \rho^2)\,h$

(12.2) $M = 2\pi s \cdot \frac{r+\rho}{2} = \pi s(r+\rho)$.

Dabei ist die Länge *s* der Mantellinie (die Seite des Kegelstumpfes) nach dem *Satz des Pythagoras* gleich

(12.3) $s = \sqrt{(r-\rho)^2 + h^2} = \sqrt{r^2 - 2r\rho + \rho^2 + h^2}$.

Sind *V*, *r* und *ρ* gegeben, so folgt aus der Volumenformel (12.1) für die Höhe

(12.4) $h = \frac{3V}{\pi \cdot (r^2 + r\rho + \rho^2)}$.

Daraus lässt sich *s* aus (12.3) berechnen. Schließlich ergibt sich mit *s* auch *M* aus der Formel (12.2).

Beispiel. Für die Vorgaben

$$r = 16{,}4 \text{ Fuß}, \rho = 10{,}8 \text{ Fuß}, \mathrm{V} = 1648{,}72 \text{ Kubikfuß}$$

der Aufgabe erhält man aus (12.4) das Zwischenresultat

$$h \approx 2{,}8 \text{ Fuß}$$

und schließlich aus (12.3) und (12.2) die Endresultate

$$s \approx 6{,}26 \text{ Fuß}, M \approx 535 \text{ Quadratfuß}\,.$$

Bemerkung: In der Lösung der Aufgabe braucht man neben den Vorgaben für *s* in (12.3) die Höhe *h* und für *M* in (12.2) die Länge *s*. Man kann durch Einsetzen der Formeln für die Zwischengrößen *h* und *s* auch explizite Formeln für *s* und *M* erhalten, die allerdings dann entsprechend kompliziert aussehen. Wir geben sie trotzdem an:

$$s = \sqrt{(r-\rho)^2 + \frac{9V^2}{\pi^2(r^2 + r\rho + \rho^2)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi^2(r^2+r\rho+\rho^2)^2(r-\rho)^2+9V^2}}{\pi(r^2+r\rho+\rho^2)},$$

$$M = \pi(r+\rho)\sqrt{(r-\rho)^2+\frac{9V^2}{\pi^2(r^2+r\rho+\rho^2)^2}}$$

$$= \frac{r+\rho}{r^2+r\rho+\rho^2}\sqrt{\pi^2(r^2+r\rho+\rho^2)^2(r-\rho)^2+9V^2}\,.$$

Variante 2: Lösung mit Trigonometrie

Wir denken uns wie in Abb. 12.1 den Kegelstumpf zu einem Kegel ergänzt. Dann gilt für den halben Öffnungswinkel φ (an der Spitze) des Kegels.

$$\tan(\varphi) = \frac{r-\rho}{h}\,.$$

Unter Verwendung von (12.4) entsteht die Gleichung

$$(12.5)\ \tan(\varphi) = \pi\frac{r-\rho}{3V}\,(r^2+r\rho+\rho^2) = \frac{\pi}{3V}(r^3-\rho^3),$$

aus der der Hilfswinkels φ berechnet wird. Wir stellen nun die gesuchten Größen als Funktionen von φ dar. Wegen (12.3) findet man

$$s^2 = (r-\rho)^2+\frac{(r-\rho)^2}{\tan^2(\varphi)} = (r-\rho)^2\left(1+\frac{1}{\tan^2(\varphi)}\right)$$
$$= (r-\rho)^2\left(1+\frac{\cos^2(\varphi)}{\sin^2(\varphi)}\right) = \frac{(r-\rho)^2}{\sin^2(\varphi)}$$

und damit

$$(12.6)\ s = \frac{r-\rho}{\sin(\varphi)}\,.$$

Schließlich ist nach (12.2)

$$(12.7)\ M = \pi\frac{(r-\rho)(r+\rho)}{\sin(\varphi)} = \pi\frac{r^2-\rho^2}{\sin(\varphi)}\,.$$

Beispiel. Wir nutzen die Vorgaben

$$r = 16{,}4 \text{ Fuß}, \rho = 10{,}8 \text{ Fuß}, V = 1648{,}72 \text{ Kubikfuß}$$

der Aufgabe. Zunächst ist nach (12.5)

$$\tan(\varphi) = \frac{\pi}{3 \cdot 1648{,}72}(16{,}4^3 - 10{,}8^3) \approx 2$$

und damit $\varphi \approx 1{,}1075 \triangleq 63{,}45°$. Die Formeln (12.6) und (12.7) liefern

$$s \approx \frac{16{,}4 - 10{,}8}{\sin(1{,}1075)} \approx 6{,}26, \qquad M \approx \pi \frac{16{,}4^2 - 10{,}8^2}{\sin(1{,}1075)} \approx 535\,.$$

Die Ergebnisse $s \approx 6{,}26$ Fuß, $M \approx 535$ Quadratfuß entsprechen denen aus der Variante 1.

Sonderfälle:

1. Für $r = \rho$ ergibt sich ein Zylinder. Dann ist nach Variante 1

$$s = h = \frac{V}{\pi r^2}, M = 2\pi r h = \frac{2V}{r}\,.$$

Die Formeln von Variante 2 sind wegen $\varphi = 0$ nicht anwendbar.

2. Für $\rho = 0$ erhält man einen Kegel. Dann folgt

$$h = \frac{3V}{\pi r^2}, s = \sqrt{r^2 + h^2}, M = \pi s r\,.$$

Die Formeln von Variante 2 ergeben

$$s = \frac{r}{\sin(\varphi)}, M = \pi \frac{r^2}{\sin(\varphi)}\,.$$

6. Zur Mathematikmethodik im 19. Jahrhundert

Der Leitfaden [3] von August Wilhelm Grube aus dem Jahre 1881 ist in mehrfacher Hinsicht bemerkenswert. Erstens vermittelt er einen Einblick in die methodischen Auffassungen zum Mathematikunterricht zu Gottlob Freges Zeiten, und zweitens können die geschilderten Kontroversen zur Unterrichtsgestaltung durchaus die gegenwärtige Diskussion bereichern. Schließlich geht es im Elementarunterricht auch um das Zahlenverständnis, das in Gottlob Freges Grundlagenprogramm noch eine große Rolle spielen sollte.
Die Große Stadtschule in Wismar hatte einen guten Ruf, nicht zuletzt wegen ihrer neuhumanistischen Ausrichtung. Ich vermute daher, dass Gottlob Freges Mathematiklehrer die Auffassungen Grubes im Wesentlichen teilten.

In dem Leitfaden äußerte Grube sinngemäß: Pestalozzi hat uns von der objektiven und unanschaulichen abstrakt-wissenschaftlichen Methode im Elementarunterricht befreit und uns zur subjektiven psychologischen Methode geführt. Dabei scheint die Form der „Anschaulichkeit“ aber inzwischen oft zu einer Übertreibung in der entgegengesetzten Richtung geführt zu haben. Haben wir dadurch die Anschauung einem **subjektiven Formalismus** geopfert? Nicht nur das anschauende Subjekt, sondern auch das angeschaute Objekt verlangt unsere Aufmerksamkeit. Gefragt ist eine konkret-objektive Methode.
Zum praktischen Rechnen gehört auch etwas **Theorie**, damit das Rechnen nicht nur ausgeführt, sondern auch „**begriffen**“ und „**erfasst**“ wird. Der subjektive Standpunkt erzeugt eine Unzahl von Methoden und ein endloses Experimentieren mit ihnen. Je weiter man von der wahren Natur des Objektes abkommt, je freier kann man das Methodenspiel entfalten. Dabei wird der Grundsatz vergessen: **Der Gegenstand ist zugleich seine Methode!** So enthalten vermeintliche Unterschiede in Wahrheit die gleiche Substanz. Aus allgemeinen Methoden werden subjektive Manieren, die sich im Einzelnen verlieren, über das man trefflich streiten kann.
Auch eine Flucht in die Theorie der Psychologie ist einseitig und gefährlich. Beides zusammen ergibt den goldenen Weg: Erkennen des Objektes und Verständnis der Psychologie des Subjektes.
Die Lehrer müssen über dem Stoff stehen, Selbsttätigkeit und Freitätigkeit praktizieren, frei beobachten und Zusammenhänge erkennen, Ideen herausarbeiten, die Verschiedenheit des Einzelnen zur Einheit zusammenführen. Wenn er diese Methodik an seine Schüler weitergeben kann, dann wird viel Zeit gespart. Wer das Wesen einer Rechenmethode verstanden hat, der braucht nur

wenige Beispiele und Anwendungen. Nur aus der **Vertiefung des Lehrobjektes** kann das Verständnis und die **Liebe** zu ihm erwachsen! Mit der Liebe kommt auch der Wille zum Lernen, zur wirklichen Erfassung des Objektes.
Obwohl das **Kopfrechen** zunehmend vom Tafelrechnen verdrängt wird, sollte es gerade zu Beginn fleißig geübt werden.
Es ist methodisch und psychologisch nicht gut, **Schwierigkeiten** des Verständnisses übermäßig zu **häufen**. So soll der Schüler z.B. erst mit gemeinen Brüchen fest vertraut sein, bevor Dezimalbrüche eingeführt werden.
Der Elementarunterricht legt den Grundstein für die spätere **Geistesentwicklung** der Schüler einschließlich ihrer **sittlichen Komponente**. Deshalb verdient er auch so gründlich durchdacht zu werden. Der Schulunterricht ist dem Privatunterricht vorzuziehen, weil er auch die Gemeinschaft einschließt, das **Miteinander von Lehrern und Schülern**. Der Lehrer muss sich der **Vorbildwirkung** seiner Person für sein Fach und für die Schulgemeinschaft bewusst sein. **Lebendiger Unterricht** ist das A und O für williges Lernen und Begreifen. Ohne **Respekt und Zuneigung** der Schüler zur Lehrerperson wird der Unterricht sein Ziel verfehlen.
Gefragt ist der **sittlich-freie** Mensch, der fähig ist zu reflektieren, zu abstrahieren und sich damit von der reinen Sinnenwelt zu lösen, indem er erkennt und begreift. Diese Prozesse bedürfen der Sprache. **Spracherziehung** ist also ein wesentlicher Bestandteil jeden Unterrichts. Das Rechnen muss in sauberer einwandfreier Sprache erfolgen. Schüler sollten in vollständigen Sätzen sprechen und schreiben. Wenn die Sprache für das Arbeiten mit Zahlen noch nicht gereift ist, so sind die Zahlenvorstellung und das Zahlenverständnis noch nicht vollständig.
Der Lehrer sollte zunächst heuristisch arbeiten und dem Schüler **selbsttätiges Lernen** ermöglichen. In der Zahlenlehre ist eine organische Einheit anzustreben. Es geht um das Zahlenverständnis. Mit dem Zählen sollte zugleich das Rechnen verbunden werden. Beim Rechnen, auch beim praktischen Rechnen, bleibt die Zahl immer der wesentliche Inhalt.

Literaturverzeichnis

1. Bartsch, Hans Jochen: Taschenbuch mathematischer Formeln. Fachbuchverlag Leipzig 1993.
2. Greve, Adolf (Hrsg.): Fünfstellige Logarithmische und Trigonometrische Tafeln nebst einer größeren Anzahl von Hilfstafeln, 35. Auflage. Verlag von Carl Meyer, Hannover 1936.
3. Grube, August Wilhelm: Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule nach den Grundsätzen einer heuristischen Methode. Ein methodischer Beitrag zum erziehenden Unterricht, sechste verbesserte Auflage. Verlag von Theodor Chr. Fr. Enslin, Berlin 1881. Nachdruck bei Hansebooks.
4. Kreiser, Lothar: Gottlob Frege, Leben – Werk – Zeit. Felix Meiner-Verlag, Hamburg 2001.
5. Wille, Matthias: >alles in den Wind geschrieben< , Gottlob Frege wider den Zeitgeist. Mentis Verlag, Paderborn 2020.
6. Schott, Dieter: Ingenieurmathematik mit MATLAB, Algebra und Analysis für Ingenieure. Fachbuchverlag Leipzig 2004.
7. Schott, Dieter (Hrsg.): Gottlob Frege – Ein Genius mit Wismarer Wurzeln, Leipziger Universitätsverlag 2012.
8. Mathematische Abituraufgaben an der Großen Stadtschule in Wismar vom 9. Februar 1869. Archiv der Hansestadt Wismar, Große Stadtschule, 281.

Autor

Prof. Dr. rer. nat. habil. Dieter Schott

Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Gottlob-Frege-Zentrum
Hochschule Wismar
Philipp-Müller-Str. 14
D-23966 Wismar
E-Mail: dieter.schott@hs-wismar.de

WFR - Wismarer Frege-Reihe / Wismar Frege Series
Herausgeber und Redakteur Dieter Schott, ISSN 1862-1767

WFR-Publikationen zu Gottlob Frege

Heft 02/2006	Bertram Kienzle: Der Ursprung der modernen Logik und Semantik bei Gottlob Frege, Juni 2006.
Heft 03/2006	Dieter Schott (Hrsg.): Wanderungen zu Ehren von Gottlob Frege – Ein Resümee nach 20 Jahren, November 2006.
Heft 01/2008	Dieter Schott (Hrsg.): Gottlob Frege – Leistungen und Wirkungen, Frege-Kolloquium zum Hochschuljubiläum, Juni 2008.
Heft 02/2008	Heinz-Helmut Bernd: Hauptfach Mathematik. Über Neuhumanismus, Wertewandel und heutige Befindlichkeiten. Gottlob Frege – Bildungsbürger im Systemwechsel, November 2008.
Heft 01/2009	Dieter Schott (Hrsg.): Gottlob Frege – Mathematiker, Logiker und Philosoph, Sonderheft für Frege-Preisträger, Juli 2009.
Heft 05/2009	Bertram Kienzle: Frege und die Zahlen, Juni 2009.
Heft 01/2010	Lothar Kreiser: Die Freges aus Wismar, Juni 2010.
Heft 04/2010	Achim Trebeß (Hrsg.): Gottlob Freges politisches Tagebuch und die Hochschule Wismar - die zu kurze Geschichte einer Diskussion, Juni 2010.
Heft 01/2011	Harald Thrams: Denkt doch einmal logisch! Wissenswertes und Nachdenkliches über die Mathematik, über die Logik und über Gottlob Frege, Januar 2011.
Heft 02/2013	Dieter Schott (Ed): Contributions dedicated to FREGE on the occasion of the 3rd International Gottlob Frege Conference in Wismar.
Heft 03/2015	Christian Frege: Familie und Abstammung von Professor Gottlob Frege, Dezember 2015.
Heft 03/2016	Dieter Schott: Mit dem Drahtesel auf Freges Spuren. Eine Kultur- und Bildungsreise der besonderen Art. Tabea Rohr: Einleitungsvortrag zu Gottlob Frege, Mai 2016.
Heft 01/2020	Dieter Schott: Das Mathematikabitur von Gottlob Frege, Dezember 2020.

Herausgeber und Redakteur

Prof. Dr. rer. nat. habil. Dieter Schott
Gottlob-Frege-Zentrum
Fakultät für Ingenieurwissenschaften
Hochschule Wismar
Philipp-Müller-Str. 14
D - 23966 Wismar
Telefon: ++49 / (0)3841 / 753 7333
Fax: ++49 / (0)3841 / 753 7130
E-Mail: dieter.schott@hs-wismar.de

Vertrieb:
Direkt über den Herausgeber oder das Gottlob-Frege-Zentrum

ISSN 1862-1767