

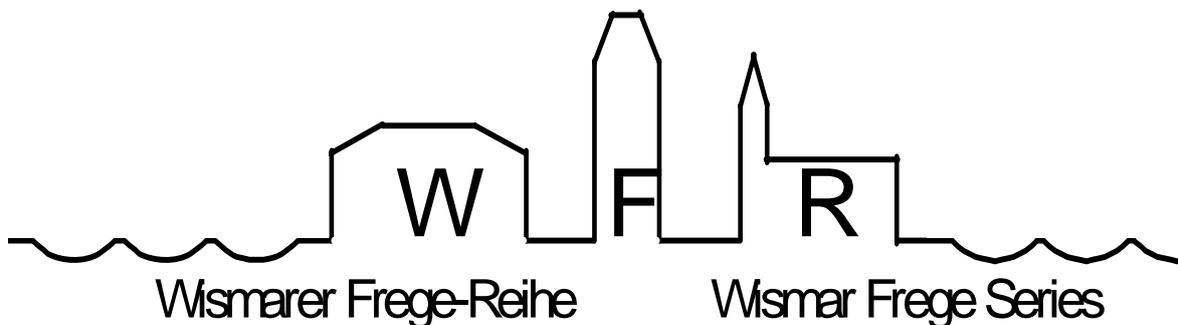
Hochschule Wismar Gottlob-Frege-Institut



SONDERHEFT
für Frege – Preisträger

Gottlob Frege –
Mathematiker, Logiker und Philosoph

Heft 01 / 2009



Das **Gottlob-Frege-Zentrum** wurde am 7.11. 2000 an der Hochschule Wismar gegründet. Seine Mitglieder setzen sich für eine wissenschaftlich begründete, praxisorientierte, moderne und international ausgerichtete Ausbildung in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Grundlagendisziplinen ein.

Das **Gottlob-Frege-Institut** widmet sich seit seiner Gründung im Jahre 2005 der Didaktik-Forschung in den angegebenen Disziplinen.

Weitere Informationen zum Gottlob-Frege-Zentrum und Ansprechpartnern finden Sie auf unserer Homepage im World Wide Web (WWW):

<http://www.hs-wismar.de/frege>

Die Wismarer Frege-Reihe ist urheberrechtlich geschützt. Eine Vervielfältigung ganz oder in Teilen, ihre Speicherung sowie jede Form der Weiterverbreitung bedürfen der vorherigen Genehmigung durch den Herausgeber.

Herausgeber und Redakteur:

Prof. Dr. rer. nat. habil. Dieter Schott
Fakultät für Ingenieurwissenschaften
Hochschule Wismar
Philipp-Müller-Straße 14
D – 23966 Wismar
Telefon: ++49 / (0)3841 / 753 322
Fax: ++49 / (0)3841 / 753 130
E-mail: dieter.schott @ hs-wismar.de

ISSN 1862-1767

Alle Rechte vorbehalten.

© Hochschule Wismar, Gottlob-Frege-Institut, 2009.
Printed in Germany

WFR - Wismarer Frege-Reihe / Wismar Frege Series

- Heft 01/2005 Proceedings Workshop Mathematik für Ingenieure, Bremen, Oktober 2005.
- Heft 01/2006 Känguru-Wettbewerb, Aufgaben und Lösungen, Wismar, März 2006.
- Heft 02/2006 Bertram Kienzle: Der Ursprung der modernen Logik und Semantik bei Gottlob Frege, Juni 2006.
- Heft 03/2006 Wanderungen zu Ehren von Gottlob Frege – Ein Resümee nach 20 Jahren, November 2006.
- Heft 04/2006 Diethardt Röthel: Zukunftsprojekt Schulschach – Gehirnjogging, Aufgaben und Lösungen, Dezember 2006.
- Heft 05/2006 Proceedings 5. Workshop Mathematik für Ingenieure, Wismar, Teile 1 – 3, September 2006.
- Heft 01/2007 Proceedings Minisymposium Moderne Mathematikausbildung für Ingenieure, Humboldt-Universität Berlin, Teile 1 – 2, März 2007.
- Heft 02/2007 Mathematik für Ingenieure – Thesen zum Jahr der Mathematik 2008, Dezember 2007. / Mathematics for Engineers – Theses to the Year of Mathematics 2008, December 2007.
- Heft 01/2008 Gottlob Frege – Leistungen und Wirkungen, Frege-Kolloquium zum Hochschuljubiläum, Juni 2008.
- Heft 02/2008 Heinz-Helmut Bernd: Hauptfach Mathematik. Über Neuhumanismus, Wertewandel und heutige Befindlichkeiten. Gottlob Frege – Bildungsbürger im Systemwechsel, November 2008.
- Heft 03/2008 Proceedings 6. Workshop Mathematik für Ingenieure, Soest, Teile 1 – 2, September 2008.
- Heft 04/2008 Proceedings Minisymposium Moderne Mathematikausbildung für Ingenieure, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Teile 1 – 2, September 2008.
- Heft 01/2009 Gottlob Frege – Mathematiker, Logiker und Philosoph, Sonderheft für Frege-Preisträger, Juli 2009.

Vertrieb

Hochschule Wismar Service GmbH
Philipp-Müller-Str. 14
D - 23966 Wismar
Telefon: ++49 / (0)3841 / 753 574
Fax: ++49 / (0)3841 / 753 575
E-mail: info@hws.hs-wismar.de

ISSN 1862-1767

Inhaltsverzeichnis

Dieter Schott: Zur Ehrung von Gottlob Frege 2

Gottlob Frege – Leistungen und Wirkungen

Gottfried Gabriel: Gottlob Frege – Der Mathematiker als Philosoph 6

Dieter Schott: Gottlob Frege und die Begründung der Mathematik 26

Uwe Lämmel: WENN Frege DANN Logik 38

Gottlob Frege – Zur historischen Einordnung

Heinz-Helmut Bernd: Hauptfach Mathematik. Über Neuhumanismus, Wertewandel und heutige Befindlichkeiten. Gottlob Frege – Bildungsbürger im Systemwechsel 49

Gottlob Frege – Kurzbiographie 75

Dieter Schott

Zur Ehrung von Gottlob Frege

1. Das Gottlob-Frege-Zentrum

Das Gottlob-Frege-Zentrum wurde am 7. 11. 2000 an der Hochschule Wismar gegründet. Seine Mitglieder kommen aus den Grundlagenbereichen Mathematik, Physik und Informatik der Fakultäten für Ingenieurwissenschaften und Wirtschaftswissenschaften. Sie setzen sich für eine wissenschaftlich fundierte und mathematisch orientierte moderne Grundlagenausbildung an den Hochschulen und insbesondere an der Hochschule Wismar ein. Darüber hinaus wirken sie für eine verstärkte Popularisierung der Mathematik in der Öffentlichkeit. Vertreter des Zentrums tragen über ihre Ergebnisse und Ansichten auf nationalen und internationalen Konferenzen vor und veröffentlichen diese in entsprechenden Zeitschriften. Sie sind Verfasser von Lehrbüchern und populären Aufgabensammlungen für Jugendliche. Sie organisieren populärwissenschaftliche Veranstaltungen und Wettbewerbe.

Seit einiger Zeit kämpfen die Mathematiker weltweit um eine bessere Wahrnehmung ihrer Wissenschaft in der Gesellschaft. Das internationale Jahr der Mathematik 2000 war ein besonderer Höhepunkt auf diesem Wege. Dabei wurden einer breiten Öffentlichkeit einerseits die Attraktivität und andererseits die Schlüsselstellung der Mathematik für technische Innovationen und für die Gestaltung der Zukunft bewusst gemacht. Das Jahr der Mathematik 2008 in Deutschland unter dem Motto „Mathematik – Alles was zählt!“ war eine weitere zentrale Initiative. Zum Erfolg dieser Aktionen hat das Gottlob-Frege-Zentrum mit seinen Veranstaltungen und Projekten beigetragen

Zur Popularisierung der Mathematik gehört auch die Würdigung der Leistungen unserer Vorfahren auf mathematischem Gebiet. Daher hat sich unser Zentrum neben dem Schwerpunkt Mathematik der Pflege des wissenschaftlichen Erbes von Gottlob Frege (1848 – 1925) angenommen. Der Mathematiker, Logiker und Philosoph wuchs in Wismar auf und absolvierte dort seine Schulausbildung bis zur Hochschulreife. Am Ende dieses Heftes befindet sich eine Kurzbiographie, die weitere Daten zum Leben von Frege enthält.

Gottlob Frege fand unter den Zeitgenossen für seine wissenschaftlichen Leistungen zunächst wenig Anerkennung. Erst nachdem der britische Mathematiker, Philosoph und Friedenskämpfer Bertrand Russell (1872 – 1970) die besonderen Verdienste Freges bei der logischen Begründung der Mathematik hervorhob, erfolgte eine intensivere Auseinandersetzung mit seinen Werken vor allem im angelsächsischen Ausland. Die Leistungen und Wirkungen von Gottlob Frege wurden oft mit denen von Aristoteles auf eine Stufe gestellt.

Eine generelle Aufarbeitung der wissenschaftlichen Leistungen von Frege begann in Deutschland erst in den 70-er Jahren des vorigen Jahrhunderts. Im Jahre 1984 fand die zweite internationale Frege-Konferenz der Universität Jena in Schwerin statt. Seit dieser Zeit wird dem Frege-Erbe auch in seiner Heimatstadt Wismar und an ihrer Hochschule verstärkte Aufmerksamkeit entgegengebracht. Seit dem Jahre 1992 vergibt die Hansestadt Wismar jährlich den Gottlob-Frege-Preis an Absolventen der Hochschule Wismar für besondere Leistungen in den Abschlussarbeiten.

Im Jahre 2005 hat das Gottlob-Frege-Zentrum das erste Frege-Kolloquium der Hochschule Wismar organisiert. Vortragender war Prof. Kienzle aus Rostock (siehe Heft 02/2006 in dieser Reihe). Zum zweiten Frege-Kolloquium im Jahre 2008 konnte wieder ein ausgewiesener Frege-Experte gewonnen werden, Prof. Gabriel von der Universität Jena, der ehemaligen Wirkungsstätte von Prof. Frege. Während im Hauptvortrag vor allem die philosophische Wirkung von Frege im Mittelpunkt stand, wurden in zwei weiteren Kurzvorträgen die Wirkungen in der Mathematik und in der Informatik erörtert (siehe Heft 01/2008 in dieser Reihe und dieses Heft). Auf dem dritten Frege-Kolloquium in diesem Jahr hat erneut Prof. Kienzle aus Rostock vorgetragen. Dieser Beitrag wird in einem der nächsten Hefte der Wismarer Frege-Reihe erscheinen.

2. Das politische Tagebuch von Gottlob Frege

Nach der Sichtung von Freges Nachlass stieß man auf ein politisches Tagebuch, das Ansichten und Denkweisen aus seinen letzten Lebensjahren wiedergibt. Dieses Tagebuch war von Frege nicht für die Öffentlichkeit bestimmt. Es erschien auch nicht im wissenschaftlichen Nachlass. Eine Veröffentlichung wurde später trotzdem erwogen und war in Vorbereitung. Als jedoch öffentlich der Verdacht geäußert wurde, man wolle den Inhalt des Tagebuches wegen seiner politischen Brisanz bewusst unterdrücken, wurde es im Jahre 1989 auch allgemein zugänglich gemacht. Von Gottfried Gabriel und Wolfgang Kienzler erschien in der Deutschen Zeitschrift für Philosophie 1994 eine historisch kommentierte Ausgabe (siehe auch Kurzbiographie). Auch in der wichtigsten Frege-Biographie „Gottlob Frege, Leben – Werk – Zeit“ von Lothar Kreiser (Felix Meiner Verlag, Hamburg 2001) findet man längere Passagen zur historischen Bewertung. Da das Tagebuch in bestimmten Passagen antidemokratische und antisemitische Äußerungen enthält, hat es in der Öffentlichkeit zu Recht Befremden ausgelöst. In einigen Zeitungsartikeln standen allerdings Polemik und Demagogie im Vordergrund. Einzelne Passagen wurden herausgegriffen und ohne fundierten historischen und persönlichen Hintergrund aus heutiger Sicht beleuchtet. Allerdings ist eine objektive Einschätzung der Tagebuchnotizen nicht einfach und erfordert großen historischen

Sachverstand. Da hier auch Vermutungen und Spekulationen einfließen, wird es wohl immer Meinungsverschiedenheiten bei der Interpretation des politischen Tagebuches geben.

Zweifellos sind Freges späte politische Ansichten aus heutiger Perspektive inakzeptabel. Mit unseren Kenntnissen über die Verbrechen des Naziregimes erscheinen Freges Notizen unerträglich. Es zeigt sich erneut, dass wissenschaftliche Größe allein nicht davor schützt, den Einflüssen demagogischer Ideologien und ihrer propagandistischen Mechanismen zu erliegen.

3. Diskussionen zur Person Frege an der Hochschule Wismar

Im Jahre 2008 gab es an der Hochschule Wismar heftige Diskussionen zu den Tagebuchnotizen von Gottlob Frege. An der Fakultät Gestaltung stieß man erstmalig auf Artikel, die sich mit Freges politischem Tagebuch beschäftigten. Es wurde Kontakt zum Gottlob-Frege-Zentrum mit dem Ziel aufgenommen, die Tagebuchaufzeichnungen in der Hochschulöffentlichkeit zu diskutieren. Insbesondere trat die Frage auf, ob man unter diesen Umständen den Frege-Preis noch an Studenten der Hochschule verleihen könnte. Im Weiteren gab es unter Kollegen und in den Gremien einen regen Meinungsaustausch.

Die Tagebuchaufzeichnungen sind in der Fachwelt natürlich längst bekannt, von Fachleuten seriös historisch bewertet und auch in der Öffentlichkeit diskutiert worden. Die Mitglieder des Gottlob-Frege-Zentrums bekennen sich zu diesen Bewertungen (siehe Abschnitt 2).

Allgemeiner Konsens besteht an der Hochschule darin, dass die Äußerungen aus heutiger Sicht befremden und nicht tolerierbar sind. Das tut aber Freges herausragenden wissenschaftlichen Leistungen, die zum allgemeinen Kulturgut der Menschheit gehören, keinen Abbruch. Nur diese sind die Grundlage für die Verleihung des Frege-Preises an Studenten mit ausgezeichneten wissenschaftlichen Abschlussarbeiten. Trotzdem gibt es gerade bei wissenschaftlichen „Lichtgestalten“ wie Frege aus Naivität oder aus bestimmten ideologischen Gründen auch immer wieder Versuche einer unsachlich geführten, die historischen Bedingungen ausklammernden Verdammung. Diese Attacken muss das Gottlob-Frege-Zentrum entschieden zurückweisen.

Unter den gegebenen Umständen war eine hochschuloffene Diskussion nicht nur sinnvoll, sondern sogar notwendig. Prof. Bernd hat zur Vorbereitung einer sachlich orientierten Auseinandersetzung neben den schon vorliegenden Quellen in mühevoller Kleinarbeit eine Schrift vorbereitet. Dort wird ein großer historischer Bogen gespannt, in dem sich auch die Einordnung von Freges Auffassungen wieder findet. Die Arbeit mit dem Titel „Hauptfach Mathematik – Über Neuhumanismus, Wertewandel und heutige Befindlichkeiten, Gottlob Frege – Bildungsbürger im Systemwechsel“ ist im Heft 02/2008 der Wismarer Frege-Reihe erschienen (siehe auch dieses Heft).

Im November 2008 gab es die angestrebte öffentliche Podiumsdiskussion zu Freges politischen Ansichten mit Hochschulangehörigen, Gästen aus der Stadt und Vertretern aus der Politik. Ich trug zu Beginn im Namen der Mitglieder des Gottlob-Frege-Zentrums eine Erklärung vor, die sich im Wesentlichen in Abschnitt 2 wieder findet. Der Rektor Prof. Grünwald, der damalige Senatsvorsitzende Prof. Cleve und weitere Mitglieder des Gottlob-Frege-Zentrums äußerten sich in der Diskussion in ähnlicher Weise. Von Seiten der Wismarer Stadtverwaltung wurde betont, dass dort eine gründliche Auseinandersetzung mit Freges dunklen Seiten und ihren Auswirkungen auf die Vergabe des Frege-Preises längst stattgefunden hat. Unabhängig davon wurde der dort vertretene Standpunkt der Hochschule nochmals schriftlich mitgeteilt. Obwohl sich alle Seiten in der Verurteilung von Freges Gedankengut aus seinem politischen Tagebuch einig waren, gab es in Teilbewertungen unterschiedliche Auffassungen. Nach meiner Einschätzung sind diese auch in immer wiederkehrenden Diskussionen nicht auszuräumen. Behauptungen, das Gottlob-Frege-Zentrum, die Hochschulleitung und die Stadtvertreter hätten sich immer noch nicht in der Öffentlichkeit von Freges politischem Gedankengut aus dem Tagebuch distanziert, entbehren jeder Grundlage.

Eine wichtige Schlussfolgerung wurde aber im Rahmen der Diskussionen um Gottlob Frege noch gezogen. Künftigen Frege-Preisträgern sollten rechtzeitig Informationen zur Person zur Verfügung gestellt werden, damit sie wissen, in welchem Namen ihnen der Preis verliehen wird. Das vorliegende Heft ist ein Anfang in dieser Richtung. Im Gottlob-Frege-Zentrum wird ein Buch mit prominenten Mitautoren vorbereitet, in dem alle Seiten Freges und alle Aspekte der Frege-Ehrung zur Sprache kommen. Dieses Buch soll künftig allen Anwärtern auf einen Frege-Preis rechtzeitig in die Hand gegeben werden.

Autor

Prof. Dr. rer. nat. habil. Dieter Schott

Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Gottlob-Frege-Zentrum

Hochschule Wismar

Philipp-Müller-Str. 14

D-23966 Wismar

E-Mail: dieter.schott@hs-wismar.de

Gottfried Gabriel

Gottlob Frege – Der Mathematiker als Philosoph

Einen Vortrag über den Philosophen Frege zu halten, ist immer noch etwas anderes als einen Vortrag über Philosophen wie Platon, Kant, Hegel oder Marx anzubieten.¹ Die Namen der letzteren hat fast jeder schon einmal gehört, während der Name 'Frege' nicht einmal allen philosophisch Interessierten bekannt sein dürfte. Innerhalb der akademischen Philosophie, also derjenigen Philosophie, die an Universitäten gelehrt wird, ist dies freilich anders. Ob Ihnen, verehrte Zuhörerinnen und Zuhörer, das *Denken* Freges bekannt ist, weiß ich nicht; aber immerhin dürfte Ihnen sein *Name* schon begegnet sein. Hat die Stadt Wismar Frege doch dadurch geehrt, dass sie eine Straße nach ihm benannt hat. Vielleicht sitzen unter Ihnen sogar Bewohner dieser Straße, die wissen wollen, wer dieser Frege war und warum er einer der ganz Großen der Stadt ist (vgl. Kreiser 2001).

Die Namensgebung hat eine Vorgeschichte, an die ich zur Einstimmung erinnern möchte. Im Jahre 1984, also noch in den Zeiten der DDR, fand in Schwerin (vom 10.-14. September) eine internationale Frege-Tagung statt. Wismar selbst bot damals noch nicht genügend viele Übernachtungsmöglichkeiten. Anlass der Tagung war die 100-jährige Wiederkehr des Erscheinens von Gottlob Freges Buch *Die Grundlagen der Arithmetik*. Die Situation des Grenzübertritts (weit im Norden) ist mir als gespenstige Dokumentation der Teilung Deutschlands unvergesslich geblieben, vor allem der strenge Kieferbiss der Grenzbeamtinnen, der sich in ein aufgesetztes Lächeln verwandelte, als sie mich auf Grund meines Visums als „Staatsgast der DDR“ identifizierten. Vor Ort in Schwerin war ich dagegen erfreut über die freien Gespräche mit den Kollegen aus der DDR. Das Bemühen um Annäherung im Zeichen der „Entspannungspolitik“ schuf eine angenehme Atmosphäre.

Zum Programm der Schweriner Tagung gehörte ein Ausflug nach Wismar mit einem Besuch von Freges Grab und der Umbenennung des „Turnplatzes“ in „Gottlob-Frege-Platz“. Ich erinnere mich an einen unfreundlichen Tag mit Nieselregen. Vielleicht war dies der Grund, warum außer den Tagungsteilnehmern kaum ein Mensch zu sehen war, der diesem Ereignis beiwohnen wollte. Professor Christian Thiel aus Erlangen hielt die Ansprache. Währenddessen passierte ein älteres Paar die Versammlung. Die Frau fragte den Mann: „Gottlob Frege, wer ist das denn?“ Er antwortete ziemlich missmutig: „Wahrscheinlich wieder so ein verdienter Antifaschist!“ Nach der

¹ Der Text ist gegenüber der Vortragsfassung erweitert worden. Vor allem hat Freges logische Analyse des Zusammenhangs zwischen Existenz- und Zahlaussagen ausführlich Berücksichtigung gefunden.

Wende erhielt der Platz durch eine Entscheidung der Bürgerschaft am 26. September 1991 seinen alten Namen zurück. Ein an den Stadtpräsidenten gerichteter Brief, der noch einmal auf die Bedeutung Freges hinwies und von Frege-Forschern ‘aus aller Welt’ (auch von mir) anlässlich einer Tagung in München unterschrieben wurde, führte schließlich dazu, dass ersatzweise die „Leningrader Straße“ in „Prof.-Frege-Straße“ umbenannt wurde. Damit war Frege endgültig wieder in seiner Heimatstadt angekommen. Doch was hatte ihn zu Lebzeiten von Wismar nach Jena geführt?

Hier kommt ein anderer Wismarer ins Spiel – kein Sohn der Stadt, aber ein Einwohner auf Zeit: Dr. Gustav Adolf Leo Sachse. Leo Sachse, der bei Karl Snell, Hermann Schäffer und Ernst Abbe in Jena studiert hatte, war von 1868 bis 1876 als Lehrer für Mathematik und Naturwissenschaften an der *Großen Stadtschule* (Gymnasium und Realschule) in Wismar tätig. Hier legte Frege Ostern 1869 das Abitur ab und ging anschließend nach Jena, wo er bei denselben Lehrern studierte, bei denen zuvor Sachse studiert hatte. Die Wahl des Studienortes ist sicher durch Sachses Empfehlung veranlasst worden. Oktober 1876 wechselte Sachse an das neu gegründete *Großherzogliche Gymnasium*, das später (1879) so genannte *Carolo-Alexandrinum*, in Jena und traf nun wieder mit Frege zusammen. Die enge Beziehung ist dadurch belegt, dass Frege Sachse durch die Wahl von Beispielsätzen wie ‘Sachse ist ein Mensch’ literarisch ‘verewigte’. Immerhin haben wir es hier mit einer Variation des aus der Syllogistik bekannten Untersatzes ‘Sokrates ist ein Mensch’ zu tun. Ich erinnere an den berühmt-berüchtigten Schluss nach dem Modus Barbara: ‘Alle Menschen sind sterblich; Sokrates ist ein Mensch. Also ist Sokrates sterblich.’² Wie wir sehen, hat Frege Sachse die Ehre zuteil werden lassen, ihn an die Stelle von Sokrates treten zu lassen. Der so sehr auf Objektivität bedachte Frege erlaubte sich auch sonst in der Wahl seiner Beispiele – sozusagen zum Ausgleich – eine subjektive Note, indem er hier ihm nahe stehende Personen, wie seinen Adoptivsohn Alfred, seinen Bruder und Bekannte aus Bad Kleinen (namentlich Dr. Gustav Lauben, Leo Peter, Rudolf Lingens und Herbert Garner) auftreten ließ (Frege 1967: 348-350, 357). Zur Vervollständigung von Freges Biographie könnte es sich lohnen, solchen Erwähnungen im Sinne einer Spurensicherung vor Ort (in Bad Kleinen und Wismar) nachzugehen – dem Sprichwort gemäß: ‘Sage mir, mit wem du umgehst, so ich sage dir, wer du bist.’ (Mieder 1988: 539, Nr. 10617)

Einen lebensweltlichen, mitunter sogar einen aktuellen politischen Bezug, haben Freges Beispiele auch sonst.³ Erzählen möchte ich wegen des lokalen

² Vgl. zu Sachse im einzelnen die Beiträge von L. Kreiser, T. Heblack und G. Gabriel in Gabriel/Kienzler (1997: 33-67).

³ Zur politischen Rhetorik von Freges Beispielsätzen vgl. Gabriel (1997: 136f.). Der bekannteste Fall ist der Beispielsatz in *Über Sinn und Bedeutung*: „Bebel wähnt, daß durch

Rahmens die folgende Geschichte: Anlässlich der eingangs erwähnten Frege-Konferenz von 1984 stand auch ein Besuch von Freges Wohnhaus in Bad Kleinen auf dem Programm. Die Bewohnerin gewährte uns eine Führung. Man fragte nach Veränderungen, die inzwischen am Haus vorgenommen worden seien. Keine wesentlichen, hieß es, allerdings sei eine Linde vor dem Haus gefällt worden. Diese Bemerkung ließ aufhorchen. In dem späten Aufsatz *Der Gedanke* stellt Frege (1967: 352f.) die Frage „Ist jene Linde meine Vorstellung?“ Das argumentative Ziel der Überlegung ist, die idealistische Auffassung, die diese Frage bejahen würde, zu widerlegen. Aus Freges Arbeitszimmer blickend vergegenwärtigte ich mir die lebensweltliche Situation des Schreibens von *Der Gedanke*: Eine Linde im Garten vor Augen vergewissert sich Frege, dass das, was er mit seinen Augen sieht, (aus kategorialen Gründen) keine Vorstellung sein könne.

Nun fragen Sie sich vielleicht, ob meine Geschichte bloß erfunden ist. Dichtung oder Wahrheit? Das wäre hier die Frage. Nach Frege habe ich mich, wie es an derselben Stelle heißt, dann „in das Gebiet der Dichtung verirrt“, wenn „die Bezeichnung ‘jene Linde’ leer ist“, wenn ihr nämlich der Bezug (oder in Freges Ausdrucksweise: die Bedeutung) fehlt, jene Linde also bloß eine Fiktion ist. Als Wirklichkeit bezeugenden Beleg könnte ich ein Photo von den Resten jener Linde vorlegen.⁴ Ein endgültiger Beweis ist damit allerdings auch nicht erbracht. Andere Teilnehmer haben sich einen ‘Splitter’ von dem morschen Stumpf als ‘Reliquie’ gesichert; aber wie das mit Reliquien so ist – die Splitter könnten natürlich von anderen Linden stammen.

Spaß beiseite und zurück zu Leo Sachse. In Jena ist nach dem tüchtigen Schulmann bereits eine Straße benannt worden, noch bevor Frege diese Ehre zuteil wurde. Während es den aus Weimar stammenden Sachse wieder in seine Heimat Thüringen zog, blieb Frege umgekehrt seiner Mecklenburgischen Heimat verbunden, die er schon während seiner Tätigkeit in Jena regelmäßig in den Semesterferien wandernd aufsuchte. Hieran knüpft die schöne Tradition der Frege-Wanderungen an. Vielleicht ist die folgende Anekdote zu Freges Auftreten in den Hotels während seiner Wanderschaften längst bekannt. Ich erwähne sie trotzdem, weil sie so charakteristisch ist. Frege passierte es häufiger, wenn er abends nach einem Quartier suchte, dass man ihn aufgrund seiner Wanderkleidung, seines ‘outfits’, wohl eher für einen Landstreicher hielt und ihm deshalb die Auskunft gab, dass kein Zimmer frei sei. Frege fragte dann, ob eventuell Post für Professor Frege eingetroffen sei, woraufhin sich natürlich noch ein Zimmer fand. Als wandernder Denker stand Frege in der Tradition der Peripatetiker, der ‘umhergehenden’ Philosophen der

die Rückgabe Elsaß-Lothringens Frankreichs Rachegefühle beschwichtigt werden können“ (Frege 1967: 160). Vgl. zum Kontext dieses Beispiels Sundholm (2001: 63f., 71ff.).

⁴ Ich verdanke es Peter Schroeder-Heister, der es anlässlich der Schweriner Frege-Tagung aufgenommen hat.

Antike, und damit folgte er auch im Leben der mathematischen Denkweise, in methodischer Ordnung – ohne Sprünge zu machen – ‘Schritt für Schritt’ vorzugehen.⁵

Damit komme ich zu meinem eigentlichen Thema, dem Verhältnis von Mathematik und Philosophie in Freges Werk. Der Titel meines Vortrages „Der Mathematiker als Philosoph“ gibt bereits zu verstehen, dass Frege von Hause aus kein Philosoph, sondern Mathematiker war. Nun schließen sich Mathematik und Philosophie gewiss nicht aus. Ganz im Gegenteil: Wollte doch schon Platon niemanden in seine Akademie lassen, der nichts von Geometrie versteht. Viele bedeutende Philosophen, wie z.B. Descartes und Leibniz, sind auch berühmte Mathematiker. Was Frege aber von diesen unterscheidet, ist der Umstand, dass er sich nur zu ganz bestimmten philosophischen Fragen geäußert hat, nämlich zu solchen der Wissenschaftstheorie der Mathematik, der Erkenntnistheorie, der Logik und Sprachphilosophie. Frege hat also keine Ansätze zur Entwicklung eines umfassenden Weltbildes unternommen, wie dies Platon, Descartes und Leibniz getan haben.

Frege war also kein ‘richtiger’ Philosoph. Er war aber auch kein ‘richtiger’ Mathematiker. So sucht man auf einer vor Jahren weit verbreiteten Übersichtstafel *Bedeutende Mathematiker*, die vom IBM-Konzern ausgegeben wurde, den Namen Freges vergeblich. Es trifft hier zu, was Frege schon zu Lebzeiten im Vorwort zum ersten Band seiner *Grundgesetze der Arithmetik* (S. XII), die 1893 in Jena erschienen sind, befürchtet hat: Mathematiker würden das Auftreten von „logischen Ausdrücken, wie ‘Begriff’, ‘Beziehung’, ‘Urtheil’“ mit den Worten kommentieren: „metaphysica sunt, non leguntur!“ (frei übersetzt: Metaphysisches Zeug, wird nicht gelesen), und die Philosophen würden beim Anblick einer Formel ausrufen: „mathematica sunt, non leguntur!“ (Mathematisches Zeug, wird nicht gelesen). So war es denn auch. Frege hatte sich geradezu klassisch zwischen zwei Stühle gesetzt und, wenn man so will, auch zwischen die Lehrstühle; denn zu einer ordentlichen Professur hat er es nie gebracht.

Einige kurze biographische Hinweise möchten angebracht sein: Geboren wurde Frege am 8. November 1848 in Wismar, gestorben ist er am 26. Juli 1925 in Bad Kleinen, 1869-71 studierte er Mathematik, Physik, Chemie und Philosophie in Jena, 1871-73 in Göttingen, 1873 erfolgte die Promotion in Göttingen und 1874, also bereits im Jahre darauf, die Habilitation in Jena, jeweils in Mathematik. Frege lehrte dann bis zu seiner Emeritierung 1917/18 an der Universität Jena Mathematik vor nicht gerade zahlreichen Studenten; 1879 wurde er zum außerordentlichen Professor, 1896 zum ordentlichen Honorarprofessor ernannt. Finanziert wurde die Professur durch die Stiftung seines Lehrers Ernst Abbe, der sich in Jena große Verdienste um die Stadt und

⁵ Vgl. Freges Forderung nach der „Lückenlosigkeit der Schlusskette“ (Frege 1879: IV).

die Universität erworben hat. Zu seinen bekannten Verdiensten dürfen wir nun noch hinzufügen, dass Abbes Stiftung dem bedeutendsten Logiker seit Aristoteles das Überleben gesichert hat. Dabei darf man getrost einräumen, dass selbst Abbe den Weg seines Zöglings von der Mathematik in die Logik und damit in die Philosophie zumindest anfangs nicht nachvollziehen konnte.

In seinen Lehrveranstaltungen vermittelte Frege durchaus den üblichen Stoff für die Ausbildung der Studierenden in Mathematik (und auch Physik). In seinen Veröffentlichungen ging er aber andere Wege. Hier bemühte er sich um eine logische Grundlegung der Arithmetik, indem er den Begriff der Zahl auf den logischen Begriff des Begriffsumfangs (der Klasse) und die arithmetischen Gesetze auf rein logische Gesetze zurückzuführen und damit als reine Vernunftwissenschaft zu begründen versuchte. Diesen Ansatz nennt man Logizismus. In seinem Logizismusprogramm ging Frege von Überlegungen Leibnizens zur Entwicklung einer logisch idealen Universalsprache aus und entwickelte selbständig und auf sich allein gestellt die bis heute maßgebliche Gestalt der modernen formalen Logik. Das Bemühen um präzise Begriffsbildungen und eine philosophische Grundlegung der Wissenschaften, insbesondere der Mathematik, ließ Frege zu einem Kritiker der philosophischen Strömungen im Ausgang des 19. Jahrhunderts werden. In Weiterentwicklung der Platonischen und Kantischen Philosophie widersprach er vor allem dem Empirismus und dem naturwissenschaftlichen Materialismus seiner Zeit, indem er die Möglichkeit einer von Erfahrung unabhängigen (apriorischen) Erkenntnis am Beispiel der Mathematik begründete.

Wie kann es, so werden Philosophen häufig gefragt, überhaupt apriorische Erkenntnisse geben, Erkenntnisse, zu denen keine Erfahrung notwendig ist? Hierauf hat Frege – in der Tradition des Neukantianismus stehend – eine bündige Antwort gegeben. Dabei macht er zunächst darauf aufmerksam, dass die Frage doppeldeutig ist. Worauf erstreckt sich die Rede von der Notwendigkeit der Erfahrung, auf die Herkunft (Genese) oder auf die Begründung (Geltung) der Erkenntnis?

Betrachten wir als Beispiel eine arithmetische Gleichung. Es ist nicht möglich zu erkennen, dass die Summe von 7 und 5 gleich 12 ist, ohne an Klötzen, Fingern oder Strichen das Zählen gelernt zu haben. Um das Zählen zu lernen, muss unsere sinnliche Wahrnehmung ausgebildet sein, ohne die wir zwischen den einzelnen Klötzen, Fingern und Strichen gar nicht unterscheiden könnten. Genauer gesagt: Ohne Erfahrungen gemacht zu haben, wären wir nicht in der Lage, arithmetische Gleichungen danach *beurteilen* zu können, ob sie gültig sind. Bedeutet dies aber, dass die Gleichungen aus empirischen *Gründen* gültig sind (oder nicht gültig sind)? Auf die Frage, *warum* sie gültig sind, wäre die Antwort jedenfalls unangemessen, dass wir dies durch Erfahrung gelernt haben. Dabei ist nicht zu bestreiten, dass wir in solchen

elementaren Fällen wie der Addition von 7 und 5 das Ergebnis 12 tatsächlich *zunächst* (als Kinder) insofern durch Erfahrung gelernt haben, als wir das Zählen bis 7 und dann das Weiterzählen um 5 bis 12 *geübt* haben; aber der Hinweis auf diese Tatsache ist keine Antwort auf die Frage nach der *Begründung*. Als Antwort auf die Begründungsfrage ist er kategorial fehl am Platz.

Zu behaupten, dass die Geltung unserer Gleichung durch Erfahrung *begründet* sei, würde bedeuten, dass $7 + 5 = 12$ deshalb gelte, weil wir (und andere) bisher immer, wenn wir 7 und 5 Dinge ‘zusammengezählt’ haben, 12 Dinge ‘herausbekommen’ hätten. Immer? Nehmen wir an, wir hätten in einen Korb erst 7 Äpfel und dann noch einmal 5 Äpfel gelegt, würden danach die Äpfel wieder herausnehmen und feststellen, dass wir 11 Äpfel im Korb haben. Was wäre die angemessene Reaktion? Sicher nicht, die Geltung des Satzes $7 + 5 = 12$ so einzuschränken, dass er zwar in den meisten, aber nicht in allen Fällen gelte. Unser Verdacht sollte vielmehr dahingehen, dass uns ein Apfel irgendwie abhanden gekommen ist. In diesem Sinne *gilt* der Satz a priori, unabhängig von Erfahrung. Dieses Apriori darf aber nicht genetisch verstanden werden, es ist ein Begründungsapriori. Frege hat diese Unterscheidung mit der ihm eigenen Deutlichkeit auf den Punkt gebracht: „Ich will [...] gar nicht leugnen, dass wir ohne sinnliche Eindrücke dumm wie ein Brett wären und weder von Zahlen noch von sonst etwas wüssten; aber dieser psychologische Satz geht uns hier gar nichts an.“ (Frege 1884: § 105, Anm.) Er betrifft nämlich, so können wir hinzufügen, nur die Genese und nicht die Geltung der Erkenntnis.

Die ihm gebührende Anerkennung fand Frege erst in späten Jahren. Bertrand Russell entdeckte seine Schriften aufgrund einer Besprechung, die der italienische Mathematiker Giuseppe Peano dem ersten Band von Freges Hauptwerk *Grundgesetze der Arithmetik* gewidmet hatte. Russell erkannte und anerkannte, dass Frege bereits lange vor ihm die logischen Wege gebahnt hatte, die zu gehen er sich gerade anschickte.⁶ Die aufrichtige Würdigung, die Frege durch Russell in England zuteil wurde, dürfte der entscheidende Anstoß für die nachfolgende internationale und dann (verspätet) auch für die deutsche Wertschätzung gewesen sein. Diese Anerkennung hatte auch eine tragische Note. Sie war nämlich damit verbunden, dass Russell in Freges *Grundgesetzen der Arithmetik* einen logischen Widerspruch entdeckte, der als Russellsche Antinomie bekannt geworden ist. (Ich komme darauf zurück.) Freges Logik im engeren Sinne wird durch diesen Widerspruch nicht tangiert, und diese Logik begründet bis heute seinen Ruf und seine Weltgeltung. So schreibt der amerikanische Logiker und Philosoph Willard V. O. Quine (1974: 9): „Logik ist ein altes Gebiet, und seit 1879 ist es zu einem großen geworden.“ Warum

⁶ Vgl. Whitehead/Russell (1927: VIII, Vorwort zur 1. Aufl. 1910): „In all questions of logical analysis, our chief debt is to Frege.“

seit 1879? Nun, 1879 ist das Erscheinungsjahr von Freges *Begriffsschrift*, dem Gründungsbuch der modernen Logik.

Maßgeblich beteiligt an der Anerkennung Freges als Philosoph war der überragende Einfluss Ludwig Wittgensteins. Wittgenstein, der sich seiner Bedeutung bewusst war und dessen Stärke gewiss nicht darin bestand, andere Philosophen neben oder gar über sich anzuerkennen, schreibt im Vorwort seiner *Logisch-philosophischen Abhandlung*, dem später so genannten *Tractatus logico-philosophicus*, dass er „den großartigen Werken Freges“ und „den Arbeiten“ seines Freundes Russell „einen großen Teil der Anregung“ zu seinen Gedanken schulde. Beachten Sie den feinen Unterschied, den Wittgenstein hier in seiner Danksagung macht: Im Falle Russells spricht er bloß von „Arbeiten“, im Falle Freges aber von „großartigen Werken“. Frege dürfte überhaupt der einzige Denker gewesen sein, den Wittgenstein sein ganzes Leben lang geschätzt, wenn nicht gar verehrt hat. Wittgenstein hat Frege sogar in Jena (später auch in Bad Kleinen) aufgesucht, um mit ihm über Logik zu diskutieren. Seinen Aufenthalt konnte er dabei mit einem Verwandtenbesuch verbinden. Die Frau des Pädagogen Herman [sic] Nohl war seine Cousine. Überliefert ist die folgende Anekdote: Wittgenstein, der sich bei Frege angemeldet hatte, musste sich angesichts von dessen „großartigen Werken“ eine auch körperlich überragende Persönlichkeit vorgestellt haben. Nach dem Läuten der Hausglocke erschien ein kleiner, freundlicher Mann, den der großbürgerlich aufgewachsene Wittgenstein wohl für den Hausdiener hielt und dem er sogleich sein Anliegen erklärte: „Ich möchte Professor Frege sprechen.“ Der kleine Mann antwortete: „Ich *bin* Frege.“ – „Unmöglich!“ entfuhr es Wittgenstein.⁷

Frege war den wenigen Berichten zufolge, die uns vorliegen, der Typ des introvertierten Professors. Lustbarkeiten schien er nicht zu schätzen. Jedenfalls ließ er sich bei den Jahresfesten der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaften, deren Mitglied er war, regelmäßig entschuldigen. (Dies lässt sich den Protokollen der Gesellschaft entnehmen.) Seine Vorlesungen hielt er mit dem Rücken zum Publikum, Formeln an die Tafel malend. Als Kandidat für den Lehrpreis der Universität Jena wäre Frege gewiss nicht in Frage gekommen: „Niemals, weder während der Übungen noch nachher, stellte ein Student eine Frage oder machte eine Bemerkung. Die Möglichkeit einer Diskussion schien ganz undenkbar.“ So berichtet Rudolf Carnap (1993: 8), vermutlich der einzige Hörer, der Freges *Begriffsschrift* tatsächlich verstanden hat. Carnap verdanken wir wichtige Mitschriften von Freges Vorlesungen zur Logik, die inzwischen transkribiert und veröffentlicht worden sind (Frege 1996). Aber selbst Carnap räumt ein, dass er die

⁷ Wittgenstein, der einer der reichsten Familien Österreichs angehörte, bedachte neben anderen Autoren, in erster Linie Schriftsteller, nach dem ersten Weltkrieg auch Frege mit einer großzügigen Geldzuwendung.

Bedeutung der Arbeiten Freges erst später erkannt habe (Carnap 1993: 9f.). So wäre Frege wohl auch bei einer Evaluierung seiner wissenschaftlichen Leistungen durchgefallen.

Bei aller Zurückhaltung, ja, Scheu, war Frege doch in die wissenschaftliche Gemeinschaft des Mikrokosmos Jena eingebunden, zumindest in seinen jüngeren Jahren. So nahm er an den Sonntagsdiskussionen im Hause seines philosophisch interessierten Lehrers der Mathematik und Physik Karl Snell und an den Veranstaltungen der Mathematischen Gesellschaft Hermann Schäffers teil. Überliefert sind Diskussionen mit dem Theologen Pünjer über den Begriff der Existenz. Belegt sind ferner seine Kontakte zu den Jenaer Pädagogen in der Herbart-Tradition, zu der sich auch Leo Sachse bekannte.

Insgesamt wurde Frege eher von den philosophischen als von den mathematischen Kollegen geschätzt. Der Ordinarius für Mathematik vor Ort, Johannes Thomae, verstand zeitlebens nicht, warum sich Frege auf so abgelegene Bahnen wie die logische Begründung der Arithmetik begeben hatte (vgl. Dathe 1997: 101). Die Differenzen eskalierten schließlich Jahre später in einer öffentlichen polemischen Auseinandersetzung über die Grundlagen der Arithmetik im Zentralorgan der deutschen Mathematiker, den heute noch bestehenden *Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. Diese Auseinandersetzung dürfte die Verhältnisse 'im Hause', im Jenaer Institut, nicht gerade verbessert haben. Hervorzuheben ist allerdings das honorige Verhalten Thomaes, der sich trotz der wissenschaftlichen Differenzen institutionell, z. B. in gutachterlichen Stellungnahmen, für Frege stark machte, wenn es darum ging, diesem Anerkennung und Beförderung zukommen zu lassen.

Wissenschaftliche Zustimmung erfuhr Frege insbesondere von seinem jüngeren philosophischen Kollegen Bruno Bauch und dessen Kreis (vgl. Schlotter 2004). Hier finden sich vielfach anerkennende Bezüge auf Freges Philosophie der Mathematik, und dieser Zustimmung schlossen sich später auch Philosophen außerhalb von Jena an. Insbesondere von den Neukantianern wurde Frege zu Recht als 'Verbündeter' in der Auseinandersetzung mit dem Subjektivismus und dem darauf gegründeten Relativismus in der Erkenntnistheorie gesehen. Auch zu Rudolf Eucken, dem einzigen deutschen Philosophen, der den Nobelpreis (für Literatur) erhalten hat, unterhielt Frege trotz aller Verschiedenheit der Forschungsinteressen zeitlebens wohlwollend-kollegiale Beziehungen, die sich gelegentlich auch in Publikationen niederschlugen (Dathe 1995). Mitte der 80er Jahre wurden die beiden sogar Nachbarn. Ihre Häuser, Forstweg 22 (Eucken) und Forstweg 29 (Frege), existieren noch heute und liegen einander direkt gegenüber. Auf Euckens Anregung geht sicherlich auch die Wahl des Titels von Freges bereits erwähnter *Begriffsschrift* zurück. In einer Anmerkung verweist Frege auf Adolf Trendelenburg, von dem er den Ausdruck 'Begriffsschrift' übernommen

habe. Eucken war Schüler Trendelenburgs. Trendelenburg hat sich dadurch einen Namen gemacht, dass er als Gegner Hegels für eine an den Wissenschaften orientierte Philosophie eingetreten ist. Ich stelle mir nun die Situation vor, dass Frege im Gespräch mit Eucken von seiner eigenen Arbeit berichtet haben wird. Dieser macht ihn auf Trendelenburgs Arbeiten zur Logik aufmerksam und regt so Frege zu der Titelgebung *Begriffsschrift* an. Diesen Ausdruck verwendet Trendelenburg (1867: 4) als Bezeichnung für Leibnizens Programm einer logischen präzisen Universalsprache, in deren Tradition auch Frege seine Arbeiten gesehen hat.

Es ließen sich noch weitere Belege dafür beibringen, dass Frege in den 'Jenaer Mikrokosmos' durchaus eingebunden war und seine Gedanken zumindest von den Philosophen wahrgenommen wurden. Insofern trifft die häufig zu findende Beschreibung des verkannten, einsamen Genies nicht ganz zu. Die Einsamkeit war wohl auch selbst gewählt oder doch Ausdruck von Freges Charakter. Es spricht einiges dafür, dass ihm ein melancholischer, wenn nicht gar depressiver Zug eigen war. Richtig ist allerdings, dass Freges eigentliche Leistung, die Entwicklung der modernen formalen Logik, lange Zeit nicht erkannt wurde. Gerechterweise muss man einräumen, dass es zu deren Verständnis auch eines erheblichen Aufwandes bedurfte und bedarf. Schließlich handelte es sich bei der *Begriffsschrift* um einen komplett neuen Formalismus in völlig fremden Zeichen, den zu lernen man erst bereit ist, wenn man sieht, dass es sich auch lohnt. Um aber zu erkennen, dass es sich lohnt, muss man ihn (zumindest ein Stück weit) bereits verstanden haben. Frege (1976: 165) spricht hier selbst von einem „unglücklichen Cirkel“. Mit den *Grundgesetzen der Arithmetik* hat man ein Buch vor sich, das seitenlang im wahrsten Sinne des Wortes 'ohne Worte' Formel an Formel reiht. Wirklich *einladend* ist das nicht. Mit diesem Formalismus hatten nicht nur die Leser Probleme, sondern verständlicherweise auch bereits die Verleger. Die Arbeiten Freges wurden aus technischen Gründen nicht zum Druck angenommen, und wenn sie gedruckt wurden, musste er selbst für die Kosten aufkommen. Um den drucktechnischen Aufwand zu ermessen, haben wir uns in die Zeiten des Bleisatzes zurückzusetzen und uns zu vergegenwärtigen, dass die vielen besonderen Zeichen eigens angefertigt werden mussten. (Ich selbst habe dies noch als Mitarbeiter an der Edition von Freges Nachlass in den sechziger Jahren erlebt.) Der Umgang mit diesen Zeichen war für die Setzer noch dadurch erschwert, dass Freges Formalismus sich anders als sonst üblich zweidimensional in der Fläche ausbreitet. Diese Schwierigkeiten sind angesprochen, wenn Frege (1967: 222) in Abwandlung des geflügelten Wortes „Das Leben ist der Güter höchstes nicht“ aus Schillers *Braut von Messina* klagt: „Die Bequemlichkeit des Setzers ist denn doch der Güter höchstes nicht.“ Hätte es bereits zur damaligen Zeit die herrlichen modernen Computer gegeben, mit denen und für die beliebige Schriften erzeugt werden können,

dann hätte Frege es sicher einfacher gehabt. Allerdings ist ein solcher Gedanke in gewissem Sinne zirkulär; denn nicht zuletzt verdankt sich diese Möglichkeit just der Logik, an deren Entwicklung Frege maßgeblich beteiligt war. Schauen wir uns nun die Leistungen der Fregeschen Logik an.

Der vollständige Titel von Freges *Begriffsschrift* lautet (in Fortsetzung des Obertitels) „eine der arithmetischen *nachgebildete* Formelsprache des reinen Denkens“ (Hervorhebung G. G.). Frege spricht nicht einfach von einer „arithmetischen Formelsprache“ oder gar von einer „Formelsprache für die Arithmetik“. Wir ersehen hieraus, dass die von Frege entwickelte Formelsprache oder formale Sprache nicht bloß für mathematische Zwecke gedacht ist. Sie ist zwar, wie Frege selbst hervorhebt, aus dem Bemühen entstanden, das Beweisen (Schließen) in der Arithmetik durchsichtiger zu machen als es die Benutzung der natürlichen Sprache erlaubt (vgl. Vorwort der *Begriffsschrift*); aber damit ist nur ihr Ursprung benannt. Von vornherein hat Frege einen allgemeineren Zweck als die Anwendung beim mathematischen Beweisen im Blick. Dieser allgemeinere Zweck ist die Darlegung der Gesetze „des reinen Denkens“ (wie es im Untertitel heißt). Mit *reinem* Denken ist hier ein Denken gemeint, das „von der besondern Beschaffenheit der Dinge“ absieht. Die Gesetze des reinen Denkens sind demnach solche Gesetze, die für *jedes* Denken gelten, und zwar unabhängig von der Erfahrung (a priori). Wir haben es nicht mit psycho-logischen, sondern mit logischen Gesetzen zu tun. Logische Gesetze beschreiben nicht das Denken, wie es sich tatsächlich vollzieht und häufig in die Irre geht, sondern sie schreiben vor, wie man zu denken hat, damit man die Wahrheit nicht verfehlt.

Nun gibt es bereits seit Aristoteles eine Logik, die sich ebenso als reine Logik verstanden hat. Worin unterscheidet sich die moderne Fregesche Gestalt der Logik von dieser traditionellen Logik? Der Fortschritt der modernen gegenüber der traditionellen Logik besteht in der Ersetzung der Subjekt-Prädikat-Struktur der Aussage durch die Argument-Funktions-Struktur. Der entscheidende Schritt ist die Übertragung des mathematischen Funktionsbegriffs auf die Logik bei gleichzeitiger Erweiterung des Argument- und des Wertebereichs von Funktionen über mathematische Größen hinaus. Umgekehrt nimmt Frege auch eine logische Präzisierung des Funktionsbegriffs vor, indem er die übliche Rede von ‘Variablen’ (‘Veränderlichen’, ‘veränderlichen Größen’) in der Funktionentheorie einer scharfsinnigen Kritik unterzieht, die ihre Berechtigung auch heute noch nicht verloren hat. Charakteristisch für Freges Einstellung ist die Aussage: „Die Mathematik sollte eigentlich ein Muster von logischer Klarheit sein. In Wirklichkeit wird man vielleicht in den Schriften keiner Wissenschaft mehr schiefe Ausdrücke und infolgedessen mehr schiefe Gedanken finden als in den

mathematischen.“ (Frege 1967: 280) Anders gesagt: Exaktes Rechnen muss nicht unbedingt mit einer Genauigkeit in den Begriffen einhergehen.

Den Zusammenhang zwischen dem mathematischen Begriff der Funktion und dem logischen Begriff des Begriffs stellt Frege dadurch her, dass Begriffe als Funktionen gefasst werden, deren Werte Wahrheitswerte sind. Des Weiteren werden logische Verknüpfungen zwischen Aussagen (wie ‘und’, ‘oder’, ‘wenn – so’) als Wahrheitswertfunktionen bestimmt, nämlich als Funktionen, deren Argumente und Werte Wahrheitswerte sind. Schrittweise nimmt Frege so eine Neuordnung sämtlicher logischer Kategorien vor und führt damit einen grundlegenden Paradigmenwechsel in der Logik herbei. Wenigstens ein Beispiel sei hier angeführt: Die zusammengesetzte Aussage ‘Frege ist ein Mathematiker und Frege ist ein Philosoph’ hat die Form ‘p und q’, wobei ‘p’ für ‘Frege ist ein Mathematiker’ und ‘q’ für ‘Frege ist ein Philosoph’ steht. Die logische Darstellung ist ‘ $p \wedge q$ ’. Hier markieren ‘p’ und ‘q’ die Argumentstellen der Wahrheitswertfunktion der Konjunktion, der im Deutschen das satzverknüpfende ‘und’ entspricht. Die Funktion ist durch folgende Wahrheits(wert)tafel definiert:

p	q	$p \wedge q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Danach ist eine ‘und’-Aussage wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind, und falsch in allen anderen Fällen.

Die Sprache der Logik ist eine künstliche Idealsprache, die die natürliche Alltagssprache weder ersetzen kann noch soll. Frege selbst macht dies deutlich, indem er das Verhältnis seiner Begriffsschrift zur, wie er sagt, „Sprache des Lebens“ mit dem Verhältnis des Mikroskops zum Auge vergleicht:

„Das Letztere [das Auge, G. G.] hat durch den Umfang seiner Anwendbarkeit, durch die Beweglichkeit, mit der es sich den verschiedensten Umständen anzuschmiegen weiß, eine große Überlegenheit vor dem Mikroskop. Als optischer Apparat betrachtet, zeigt es freilich viele Unvollkommenheiten, die nur in Folge seiner innigen Verbindung mit dem geistigen Leben gewöhnlich unbeachtet bleiben. Sobald aber wissenschaftliche Zwecke große Anforderungen an die Schärfe der Unterscheidung stellen, zeigt sich das Auge als ungenügend. Das Mikroskop hingegen ist gerade solchen Zwecken auf das vollkommenste angepasst, aber eben dadurch für alle andern unbrauchbar.“

So ist diese Begriffsschrift ein für bestimmte wissenschaftliche Zwecke ersonnenes Hilfsmittel, das man nicht deshalb verurteilen darf, weil es für andere nichts taugt.“ (Frege 1879: V)

Mit diesem schönen und treffenden Vergleich erweist Frege seinem Lehrer Ernst Abbe anerkennende Referenz. (Abbe hatte durch seine Arbeiten zur physikalischen Optik die Grundlage für die Serienproduktion von Mikroskopen des Zeiss-Unternehmens in Jena geschaffen.) Mit seinem Vergleich gibt Frege aber auch selbstbewusst zu verstehen: Was Abbe für die Entwicklung des Präzisionsinstruments Mikroskop geleistet hat, leiste ich für das Präzisionsinstrument Logik. Frege hat als einer der ersten das Ausmaß der Täuschungen erkannt, welche die Sprache für unser Denken, gerade auch für das philosophische Denken, bereithält. Die logische Analyse der Sprache hat er deshalb als Methode zur Kritik und Auflösung von Begriffsverwirrungen angesehen und Kants Programm der Vernunftkritik durch logische Sprachkritik ergänzt und fortgeführt:

„Wenn es eine Aufgabe der Philosophie ist, die Herrschaft des Wortes über den menschlichen Geist zu brechen, indem sie die Täuschungen aufdeckt, die durch den Sprachgebrauch über die Beziehungen der Begriffe oft fast unvermeidlich entstehen, indem sie den Gedanken von demjenigen befreit, womit ihn allein die Beschaffenheit des sprachlichen Ausdrucksmittels behaftet, so wird meine Begriffsschrift, für diese Zwecke weiter ausgebildet, den Philosophen ein brauchbares Werkzeug werden können.“ (Frege 1879: VI f.)

Worum es hier geht, will ich an einem Beispiel erläutern. Eine der zentralen Fragen der Philosophie ist (seit der Antike) die Frage nach dem Sein. Diese Frage ist von den Vorsokratikern über Platon und Aristoteles bis zu Hegel, Marx und Heidegger in unterschiedlichen Weisen beantwortet worden. Charakteristisch für Freges Vorgehen ist, dass er zunächst einmal die Frage präzisiert und feststellt, dass vom Sein *sprachlich* in sehr verschiedenen Formen die Rede ist, die es logisch zu unterscheiden gilt, damit wir nicht durch eine Vermischung der Sprachgebräuche – durch Sprachverwirrung – in die Irre gehen. Frege nähert sich also der Frage nach dem Sein (groß geschrieben!) durch eine Analyse der Verwendungen des Wortes ‘sein’ (klein geschrieben!) und zeigt, dass es dieses so genannte ‘Hilfszeitwort’ philosophisch wahrlich in sich hat. Er unterscheidet insgesamt vier Verwendungen:

(1) Prädikation. Beispielsatz: ‘Der Himmel ist blau’. Hier wird vom Himmel ausgesagt, dass ihm das Prädikat ‘blau’ zukommt oder dass er die Eigenschaft hat, blau zu sein. Der sprachliche Ausdruck ‘ist’ steht hier für die so genannte Kopula.

(2) Identität. Beispielsatz: ‘Der Abendstern ist der Morgenstern’. Hier wird ausgesagt, dass der Abendstern derselbe Stern ist wie der Morgenstern (nämlich der Planet Venus). Der sprachliche Ausdruck ‘ist’ steht hier für das Gleichheitszeichen als Zeichen für die Relation der Identität zwischen zwei Gegenständen. Relationen zwischen *Gegenständen* nennt Frege Relationen *erster* Stufe.

(3) Unterordnung. Beispielsatz: ‘Das Pferd ist ein pflanzenfressendes Tier’ im Sinne von ‘Pferde sind pflanzenfressende Tiere’. Es wird der Begriff des Pferdes dem Begriff des pflanzenfressenden Tieres untergeordnet, und zwar in dem Sinne, dass alle Pferde pflanzenfressende Tiere sind. Hier haben wir es mit einer Relation zwischen zwei Begriffen zu tun. Relationen zwischen *Begriffen* nennt Frege Relationen *zweiter* Stufe.

(4) Existenz. Beispielsatz: ‘Gott ist’ (oder ‘Gott ist nicht’) im Sinne von ‘Ein Gott existiert’ (oder ‘Ein Gott existiert nicht’). Hier wird von dem Begriff Gottes ausgesagt, dass er die Eigenschaft hat nicht leer (oder leer) zu sein, dass also etwas (oder nichts) existiert, das die Eigenschaft hat, ein Gott zu sein. Der Ausdruck ‘ist’ steht hier für den Begriff der Existenz. Da der Begriff der Existenz eine Eigenschaft von Begriffen (und nicht von Gegenständen) aussagt, spricht Frege von einem Begriff *zweiter* Stufe.

Es ist die hier angedeutete Methode der logischen Sprachanalyse, durch deren Ausarbeitung der Mathematiker Frege zum Vater der so genannten analytischen Philosophie des 20. Jahrhunderts geworden ist. Welche Anerkennung Frege zumindest in diesem Kreis gefunden hat, davon gibt die Tatsache Kunde, dass in Westwood, in der Nähe des Campus der *University of California Los Angeles* (UCLA), ein *Hair Color Center* mit Namen „Frege“ existiert. Der amerikanische Frege-Forscher Robert May hat mit berichtet, dass der Inhaber den einen oder anderen Kurs zu Frege besucht habe und so begeistert war, dass er seinen Salon nach Frege benannt habe: Frege goes to Hollywood!

Ein besonders wichtiges Ergebnis der Analyse der Verwendungen des Wortes ‘sein’ stellt das Ergebnis dar, dass der Begriff der Existenz ein Begriff zweiter Stufe ist, Existenz also keine Eigenschaft von Gegenständen, sondern von Begriffen ist. Diese Einsicht besagt nicht etwa, dass die Begriffe selbst existieren. Eine Existenzaussage wie ‘Menschen existieren’ als eine Aussage über den Begriff ‘Mensch’ bringt vielmehr zum Ausdruck, dass der Begriff ‘Mensch’ die Eigenschaft hat, erfüllt zu sein, dass es nämlich Gegenstände gibt, die unter ihn fallen. Begriffe erster Stufe als Begriffe, unter die Gegenstände fallen (wie z. B. ‘Mensch’, ‘Tier’, ‘sterblich’, ‘glücklich’, ‘Quadratwurzel aus 1’ usw.), haben wir als Funktionen kennen gelernt, deren

Argumente Gegenstände und deren Werte Wahrheitswerte sind. Begriffe zweiter Stufe sind dagegen solche Funktionen, deren Werte zwar ebenfalls Wahrheitswerte, deren Argumente aber nicht Gegenstände, sondern Begriffe erster Stufe sind. Eine Existenzaussage wie $\exists xM(x)$, in der $M(x)$ für den Begriff des Menschen steht, ist demnach funktional so aufgebaut, dass der Begriff erster Stufe $M(x)$ als Argument des Begriffs (der Funktion) zweiter Stufe $\exists xF(x)$ fungiert, wobei F die Argumentstelle markiert, in die weitere Begriffe erster Stufe eingesetzt werden können. Entsprechendes gilt natürlich auch für den Begriff der Allheit $\forall xF(x)$. Existenz- und Allquantor stehen also für Begriffe zweiter Stufe. Aus dieser Analyse von Existenzbegriff und Existenzaussagen ergibt sich auch ein tieferes Verständnis der Zahlaussagen und des Zahlbegriffs. Die tatsächliche Entwicklung von Freges Denken dürfte allerdings wohl eher umgekehrt so verlaufen sein, dass erst die Analyse der Zahlaussagen zur Einsicht in die Natur der Existenzaussagen geführt hat.

Die Darlegung des logischen Zusammenhangs zwischen Existenz- und Zahlaussagen erlaubt eine Antwort auf die Frage, was Zahlen sind. Hier haben wir ein besonders charakteristisches Beispiel für die Fruchtbarkeit der von Frege geforderten Verbindung von mathematischem und philosophischem Denken. In der Frage, ob die Null eine natürliche Zahl ist, oder die Reihe der natürlichen Zahlen erst mit der Eins beginnt, können Mathematiker zu Religionskriegern werden;⁸ aber auf die Frage, was überhaupt eine Zahl sei, zucken sie häufig mit den Schultern. Im besten Falle verweisen sie für eine Antwort, meistens eher ironisch abwieselnd, auf die Philosophie. Was Frege von solchen Mathematikern unterscheidet, ist der Umstand, dass er genau diese Frage in seinen *Grundlagen der Arithmetik* zu beantworten versuchte.

Vergleichen wir eine zweigliedrige Existenzaussage (d. h. eine partikuläre Aussage) wie *Einige Äpfel sind grün* mit einer Zahlaussage wie *Fünf Äpfel sind grün*, so fällt auf, dass der Partikularisator *einige*, der logisch als Existenzquantor erscheint, und das Zahlwort *fünf* analog verwendet werden. Insofern ist die in der Grammatik übliche Rede von *Zahladjektiven* systematisch irreführend. Dabei gibt es bereits in der Sprache selbst Anzeichen dafür, dass Zahlwörter einer anderen Grammatik gehorchen als Adjektive wie *groß* und *grün*. Anders als in dem Ausdruck *große, grüne Äpfel* werden in dem Ausdruck *fünf grüne Äpfel* die ersten beiden Wörter nicht durch ein Komma getrennt. Ein Komma darf nur gesetzt werden, so die Faustregel, wenn an dessen Stelle auch das Wörtchen *und* stehen kann. Logisch bedeutet dies für den Ausdruck *große, grüne Äpfel*, dass die Adjektive hier untereinander und mit dem zugehörigen Substantiv konjunktiv

⁸ In gewissem Sinne könnte man mit Fritz Mauthner (1902: 181; vgl. 143) sogar sagen, dass „die Zwei die erste Zahl“ sei; denn das Zählen beginnt erst damit, dass ich zwei numerisch verschiedene Dinge als von derselben Art auffasse. Der Gedanke der Einheit einer Vielheit oder der Vielheit einer Einheit bildet sich erst mit der Zwei.

verbunden sind (gemäß der oben erläuterten Wahrheits(wert)funktion der Konjunktion). Was unter den Begriff ‘großer, grüner Apfel’ fällt, ist groß *und* grün *und* ein Apfel: ‘ x ist groß \wedge x ist grün \wedge x ist ein Apfel’. Wenn man statt ‘große, grüne Äpfel’ fakultativ (ohne Komma) ‘große grüne Äpfel’ schreibt, so nimmt man rhetorisch eine andere Klammerung im Sinne von ‘große (grüne Äpfel)’ vor. Man will nicht von Äpfeln sprechen, die sowohl groß als auch grün sind, sondern von grünen Äpfeln, die groß sind, etwa im Unterschied zu grünen Äpfeln, die klein sind. In der mündlichen Rede wird dies durch Betonung zum Ausdruck gebracht, indem man ‘*große* grüne Äpfel’ bzw. ‘*kleine* grüne Äpfel’ sagt.

Eine fakultative Verwendung des Kommas besteht für Verbindungen von Zahlwörtern und Adjektiven nicht. Das Fehlen des Kommas zwischen ‘fünf’ und ‘grün’ in dem Ausdruck ‘fünf grüne Äpfel’ ist ein Indiz dafür, dass das Verhältnis eines Zahlworts zu dem Substantiv, dem es beigeordnet ist (und zu eventuellen Adjektiven), nicht das der logischen Konjunktion ist. Dementsprechend gilt hier auch nicht das Kommutativgesetz. Zwar kann man statt ‘große, grüne Äpfel’ auch ‘grüne, große Äpfel’ sagen, niemals aber statt ‘fünf große Äpfel’ auch ‘große fünf Äpfel’ sagen. Die Oberflächengrammatik zeigt hier bereits an, dass die logische Tiefengrammatik der Zahlwörter nicht derjenigen der Adjektive entspricht. Schauen wir uns nun die Logik der Zahlwörter genauer an.

Wenn wir von ‘fünf grünen Äpfeln’ sprechen, dann meinen wir, dass die *einzelnen* Äpfel die Eigenschaft haben, grün zu sein, nicht aber, dass sie die Eigenschaft haben, fünf zu sein.⁹ Von den einzelnen Gegenständen, die zu den fünf grünen Äpfeln gehören oder ‘zählen’, kann man nicht sagen, dass sie unter den Begriff ‘fünf grüne Äpfel’ fallen; vielmehr *gibt es* genau fünf Gegenstände, die unter den Begriff ‘grüner Apfel’ fallen. Frege formuliert dies so, dass „die Zahlangabe eine Aussage von einem Begriffe enthalte“ (Frege 1884: § 46).¹⁰ Dies bedeutet, dass Zahlaussagen wie Existenzaussagen höherstufige Aussagen sind. So wie Existenzaussagen (‘Es gibt *mindestens* ein P’) unbestimmte Zahlaussagen sind, so sind Zahlaussagen (‘Es gibt *zwei* P’s’) bestimmte Existenzaussagen. Die Zahlen in Zahlangaben wie ‘2 Bier’ und ‘5 Bücher’ sind danach als Begriffe zweiter Stufe aufzufassen, die sozusagen die ‘Zahligkeit’ als eine Eigenschaft von Begriffen erster Stufe bestimmen. Vorausgesetzt ist dabei, dass es sich bei diesen Begriffen um Sortale oder Sortenbegriffe handelt. Der Sache nach kennzeichnet bereits Frege, ohne

⁹ Frege macht den Unterschied anhand eines ähnlichen Beispiels deutlich: „Spricht man nicht in einem andern Sinne von 1000 Blättern als von grünen Blättern des Baumes? Die grüne Farbe legen wir jedem Blatte bei, nicht so die Zahl 1000.“ (Frege 1884: § 22).

¹⁰ Vgl. Frege (1969: 273), wo er trotz des Scheiterns des Logizismus bekräftigt, dass „die Zahlangabe, die auf Grund einer Zählung gemacht wird, eine Aussage von einem Begriffe enthält“. So auch Frege (1969: 277).

allerdings den Ausdruck zu verwenden, ein Sortal als einen solchen Begriff, „der das unter ihn Fallende bestimmt abgrenzt und keine beliebige Zerteilung gestattet“ (Frege 1884: § 54). Hierdurch unterscheiden sich Sortale von Begriffen wie ‘Rotes’ (Freges Beispiel) und ‘Wasser’, weil hier auch noch alle Teile unter denselben Begriff fallen wie das Ganze. Um Rotes oder Wasser zählbar zu machen, muss man zusätzlich einen Sortalbegriff wie ‘Fleck’ oder ‘Tropfen’ einführen. Dann kann man von ‘3 Flecken Rotes’ oder ‘10 Tropfen Wasser’ sprechen.

Werden die Zahlen (Anzahlen) als Begriffe zweiter Stufe und damit formal als besondere Quantoren dargestellt, so bietet sich für Zahlaussagen die (inzwischen übliche) Notation ‘ $\exists_n x P(x)$ ’ an, die zu lesen ist als ‘es gibt (genau) n Gegenstände, die unter den Begriff P fallen’. Hier kommt die oben formulierte Einsicht zum Ausdruck, dass Zahlaussagen *bestimmte* Existenzaussagen sind. Den Zahlen selbst entsprechen die Ausdrücke ‘ $\exists_0 x$ ’ (für die Null), ‘ $\exists_1 x$ ’ (für die Eins) usw. Die Aussage, dass einem Begriff ‘ P ’ die Zahl 0 zukommt, besagt nichts anderes als dass der Begriff ‘ P ’ leer ist, dass es nämlich keinen Gegenstand gibt, der unter ihn fällt. Als Definition der Zahl Null (im Kontext von Zahlaussagen) ergibt sich demgemäß $\exists_0 x P(x) =_{\text{Df}} \neg \exists x P(x)$. Die Aussage, dass einem Begriff ‘ P ’ die Zahl 1 zukommt, besagt, dass es genau ein P gibt, also genau einen Gegenstand, der unter den Begriff ‘ P ’ fällt:

$$\exists_1 x P(x) =_{\text{Df}} \exists x P(x) \wedge \forall x \forall y [(P(x) \wedge P(y)) \rightarrow y=x],$$

was logisch äquivalent ist mit:

$$\exists_1 x P(x) =_{\text{Df}} \exists x [P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow y=x)] \text{ (Frege 1884: § 55).}^{11}$$

Die Aussage, dass einem Begriff ‘ P ’ die Zahl 2 zukommt, besagt, dass es genau 2 P ’s gibt, also genau 2 Gegenstände, die unter den Begriff ‘ P ’ fallen:

$$\exists_2 x P(x) =_{\text{Df}} \exists x \exists y [P(x) \wedge P(y) \wedge \neg(x=y) \wedge \forall z (P(z) \rightarrow ((z=x) \vee (z=y)))]$$

oder

$$\exists_2 x P(x) =_{\text{Df}} \exists x \exists y [P(x) \wedge P(y) \wedge \neg(x=y) \wedge \neg \exists z (P(z) \wedge \neg(z=x) \wedge \neg(z=y))].$$

Für jede Erhöhung der Zahl um 1 nimmt dementsprechend die Anzahl der durch einen Existenzquantor gebundenen Variablen sukzessiv um 1 zu. Um dies zu vermeiden, ist es notwendig, den Übergang von einer beliebigen

¹¹ Die abweichenden Formulierungen Freges sind dadurch bedingt, dass in der Begriffsschrift der Existenzquantor mit Hilfe des Allquantors und Negators dargestellt wird.

Anzahl n zu ihrer nachfolgenden Anzahl $n+1$, quantorenlogisch auszudrücken, was Frege in der folgenden Weise tut: Einem Begriff 'P' kommt die Zahl $n+1$ zu, wenn es einen Gegenstand x gibt, der unter den Begriff 'P' fällt und so beschaffen ist, dass dem Begriff „unter P fallend, aber nicht x “ die Zahl n zukommt:

$$\exists_{n+1}xP(x) =_{\text{Df}} \exists x[P(x) \wedge \exists_n y(P(y) \wedge \neg(x=y))].^{12}$$

Damit ist die unendliche Reihe der natürlichen Zahlen gegeben, allerdings in Abhängigkeit davon, dass man Begriffe zur Verfügung hat, unter die beliebig viele Gegenstände fallen, was keineswegs selbstverständlich ist.¹³

Die quantorenlogische Darstellung von Zahlaussagen genügte Frege nicht. Die Einsicht „Der adjektivische Gebrauch des Zahlwortes leitet irre“ (Frege 1969: 276) wird zum Anlass genommen, darauf hinzuweisen, dass in der Arithmetik das Zahlwort „als Eigenname eines Gegenstandes“ erscheine. Freges Logizismus ist wesentlich mit der Auffassung verbunden, dass Zahlen (Anzahlen) logische Gegenstände sind. Dabei heißt es, dass sich diese Auffassung geradezu zwangsläufig ergebe, weil wir von *der* Eins und *der* Zwei usw. sprechen. Hatte Frege sonst vor den „Täuschungen“ der Sprache gewarnt, so scheint er hier selbst einer solchen Täuschung aufgesessen zu sein. Die Verwendung des bestimmten Artikels im Singular gilt ihm als ein sprachliches Anzeichen dafür, dass Zahlen Gegenstände sind; und wenn Zahlen nicht anders denn als Gegenstände gedacht werden können und die Arithmetik auf die Logik zurückführbar sein soll, dann müssen Zahlen logische Gegenstände sein. Es ist diese Überlegung, die dazu führt, Zahlen als Begriffsumfänge zu identifizieren und (mengentheoretisch) als bestimmte Klassen von Klassen zu definieren. Die Anerkennung dieser logischen Gegenstände versucht Frege bereits in den *Grundlagen der Arithmetik* zu festigen (Frege 1884: §§ 56-61). In den *Grundgesetzen der Arithmetik* geht er noch weiter und betont, dass ohne die Einführung der Begriffsumfänge „gar nicht auszukommen“ wäre (Frege 1893: X). Demgemäß stellt er ein Grundgesetz (V) auf, welches insbesondere – nämlich für Begriffe (als besondere Funktionen) und deren Umfänge – besagt, dass sich die wechselseitige Unterordnung zweier Begriffe *stets* als Gleichheit der entsprechenden Begriffsumfänge darstellen lässt. Zugelassen ist damit die Bildung der Begriffsumfänge von beliebigen Begriffen. Genau diese

¹² Es genügt hier, dass der vorangestellte Existenzquantor *unbestimmt* bleibt und somit besagt, dass es *mindestens* ein x gibt, welches P ist. Für den Fall, dass es mehr als *genau ein* x gibt, ist nämlich ' $\exists_n y(P(y) \wedge \neg(x=y))$ ' falsch, weil dann dem Begriff „unter P fallend, aber nicht x “ eine größere Zahl als n zukommt und damit die Gesamtaussage falsch ist.

¹³ Vgl. dazu (mit Bezug auf Dedekind) Frege (1969: 147f., Anm.).

Unbeschränktheit der Umfangs- bzw. Klassenbildung führt zu der bereits erwähnten Russellschen Antinomie, die folgendermaßen zustande kommt:

Man bilde zu dem Begriff 'x ist eine Klasse, die sich selbst nicht angehört' den Umfang, also die Klasse der Klassen, die sich selbst nicht angehören. Diese Klasse heiße K. Gehört K sich selbst an oder nicht? (Ist K Element von sich selbst oder nicht?) Gehört ein Gegenstand (Klassen sind nach Frege Gegenstände) einer Klasse an, so fällt er unter den Begriff, dessen Umfang diese Klasse ist. Angenommen K gehört sich selbst an. Dann fällt K unter den Begriff, dessen Umfang K selbst ist, nämlich unter den Begriff 'x ist eine Klasse, die sich selbst nicht angehört', und gehört sich damit also selbst nicht an, was ein Widerspruch zur Annahme ist. Angenommen nun K gehört sich selbst *nicht* an. Dann fällt K unter den Begriff 'x ist eine Klasse, die sich selbst nicht angehört' und gehört damit dem Umfang dieses Begriffes an, also der Klasse der Klassen, die sich selbst nicht angehören. Diese Klasse ist aber K. Demnach gehört sich K selbst an, was ein Widerspruch zur Annahme ist.

Das Zustandekommen dieser Antinomie lässt sich anhand der so genannten Lügner-Antinomie erläutern: Nehmen wir an, jemand sagt: „Was ich gerade sage, ist gelogen.“ Wenn er mit seiner Aussage die Wahrheit sagt, so ist es wahr, dass er lügt. Er sagt also nicht die Wahrheit. Sagt er mit seiner Aussage aber nicht die Wahrheit, so ist es nicht wahr, dass er lügt. Er sagt also die Wahrheit. In jedem Falle ergibt sich ein Widerspruch. Die Antinomie entsteht durch die Selbstbezüglichkeit der betrachteten Aussage. Eine solche Struktur liegt auch der Russellschen Antinomie zu Grunde (Whitehead/Russell 1927: 60). In der klassischen Version der Lügner-Antinomie kommt der Widerspruch nicht so glatt zustande. Diese Version lautet: „Ein Kreter sagt: 'Alle Kreter lügen'“. Wenn der Kreter mit seiner Aussage nicht die Wahrheit sagt, so ist es nicht wahr, dass alle Kreter lügen. Die Verneinung von 'Alle Kreter lügen' besagt aber: 'Einige Kreter lügen nicht'. Ein Widerspruch ergibt sich hier nur dann, wenn der Kreter, der sagt 'Alle Kreter lügen', zu denjenigen Kretern gehören würde, die nicht lügen, und damit die Selbstbezüglichkeit hergestellt wäre (vgl. Brendel 1992).

Angesichts der Erschütterung, die Russells Mitteilung der Antinomie in einem Brief aus dem Jahre 1902 in Frege hervorgerufen haben muss, ist dessen Reaktion umso bewundernswerter. Er antwortet schlicht: „Ihre Entdeckung des Widerspruchs hat mich auf's Höchste überrascht und, fast möchte ich sagen, bestürzt, weil dadurch der Grund, auf dem ich die Arithmetik sich aufzubauen dachte, in's Wanken gerät.“ Gemeint ist damit das Logizismusprogramm in seiner klassenlogischen bzw. mengentheoretischen Ausführung. Frege fährt dann fort: „Jedenfalls ist Ihre Entdeckung sehr merkwürdig und wird vielleicht einen großen Fortschritt in der Logik zur Folge haben, so unerwünscht sie auf den ersten Blick auch scheint.“ (Frege 1976: 213) Rückblickend nennt Russell sechzig Jahre später (1962) die hier

zum Ausdruck kommende Haltung, Freges Liebe zur Wahrheit („dedication to truth“), fast übermenschlich („almost superhuman“) (Heijenoort 1967: 127). Übermenschlich an Frege ist, wie er sich dem Willen zur Wahrheit unterordnet und sich nicht, wie der ‘Übermensch’ Nietzsches, über die Wahrheit stellt.

Literatur

- Brendel, E.**, Die Wahrheit über den Lügner. Eine philosophisch-logische Analyse der Antinomie des Lügners, De Gruyter: Berlin/New York 1992.
- Carnap, R.**, Mein Weg in die Philosophie, übers. von W. Hochkeppel, Reclam: Stuttgart 1993.
- Dathe, U.**, Gottlob Frege und Rudolf Eucken – Gesprächspartner in der Herausbildungsphase der modernen Logik. *History and Philosophy of Logic* 16/1995, 245-255.
- Dathe, U.**, Gottlob Frege und Johannes Thomae. Zum Verhältnis zweier Jenaer Mathematiker, in: Gabriel/Kienzler (1997: 87-103).
- Frege, G.**, Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, Louis Nebert: Halle a. S. 1879.
- Frege, G.**, Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, W. Koebner: Breslau 1884.
- Frege, G.**, Function und Begriff, H. Pohle: Jena 1891.
- Frege, G.**, Grundgesetze der Arithmetik, I. Bd., H. Pohle: Jena 1893.
- Frege, G.**, Grundgesetze der Arithmetik, II. Bd., H. Pohle: Jena 1903.
- Frege, G.**, Kleine Schriften, hg. v. I. Angelelli, Wissenschaftliche Buchgesellschaft: Darmstadt 1967.
- Frege, G.**, Nachgelassene Schriften, hg. v. H. Hermes, F. Kambartel u. F. Kaulbach, Felix Meiner: Hamburg 1969.
- Frege, G.**, Wissenschaftlicher Briefwechsel, hg. v. G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel, A. Veraart, Felix Meiner: Hamburg 1976.
- Frege, G.**, Vorlesungen über Begriffsschrift. Nach der Mitschrift von Rudolf Carnap. Unter Mitwirkung von Ch. von Bülow und B. Uhlemann mit Einleitung und Anmerkungen hg. v. G. Gabriel, *History and Philosophy of Logic* 17 (1996), Nr. 1 (Sonderheft).
- Gabriel, G.**, Logik und Rhetorik der Erkenntnis, mentis: Paderborn u. a. 1997.

- Gabriel, G./Kienzler, W.** (Hg.), Frege in Jena. Beiträge zur Spurensicherung, Königshausen & Neumann: Würzburg 1997.
- Heijenoort, J. van** (Hg.), From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931, Harvard University Press: Cambridge, Mass. 1967.
- Kreiser, L.**, Gottlob Frege. Leben – Werk – Zeit, Felix Meiner: Hamburg 2001.
- Mauthner, F.**, Beiträge zu einer Kritik der Sprache, Bd. 3, J. G. Cotta'sche Buchhandlung Nachfolger: Stuttgart/Berlin 1902.
- Mieder, W.** (Hg.), Die deutschen Sprichwörter. Gesammelt von Karl Simrock, Reclam: Stuttgart 1988.
- Quine, W. V. O.**, Grundzüge der Logik, Suhrkamp: Frankfurt a. M. 1974.
- Schlotter, S.**, Die Totalität der Kultur. Philosophisches Denken und politisches Handeln bei Bruno Bauch, Königshausen & Neumann: Würzburg 2004.
- Sundholm, G.**, Frege, August Bebel and the Return of Alsace-Lorraine: The dating of the distinction between *Sinn* and *Bedeutung*, History and Philosophy of Logic 22 (2001), 57-73.
- Trendelenburg, A.**, Ueber Leibnizens Entwurf einer allgemeinen Charakteristik, in: ders.: Historische Beiträge zur Philosophie, Bd. 3: Vermischte Abhandlungen, Bethge: Berlin 1867, 1-47.
- Whitehead, A. N./Russell, B.**, Principia Mathematica, Cambridge University Press: Cambridge ²1927.

Autor

Prof. Dr. Gottfried Gabriel

Institut für Philosophie
 Lehrstuhl für Logik und Wissenschaftstheorie
 Friedrich-Schiller-Universität Jena
 D-07743 Jena
 E-Mail: gottfried.gabriel@uni-jena.de

Dieter Schott

Gottlob Frege und die Begründung der Mathematik

1. Einführung

Die Mathematik ist die älteste Wissenschaft überhaupt. Durch solche Attribute wie ‚exakt‘, (zu allen Zeiten) ‚absolut wahr‘, und ‚logisch widerspruchsfrei‘ ist sie schon immer ein Vorbild für andere Wissenschaften gewesen, zunächst für die Physik und andere Naturwissenschaften, später auch für die Wirtschafts- und Geisteswissenschaften. Der Reifegrad einer Wissenschaft lässt sich daran ablesen, wie viel Mathematik in ihr verwendet wird. Heute ist die Mathematik in allen Wissenschaften mehr oder weniger präsent. Den Einzug mathematischer Theorien und Methoden in andere Wissenschaften nennt man *Mathematisierung*. Dieser Prozess ist längst nicht abgeschlossen.

Ohne Zweifel ist die Mathematik der Schlüssel für Innovation und gesellschaftlichen Fortschritt. In den Geschichtsepochen stand sie daher je nach gesellschaftlicher Orientierung mehr oder weniger im Vordergrund.

Gottlob FREGE war ein bedeutender Wissenschaftler, der als Mathematiker begann, seine Kenntnisse aber auch für andere Gebiete wie die Logik [Lämmel04] und Philosophie [Kienzle06] nutzbar machte (siehe auch [Kreiser01], [Mayer96], [WIKI08]). Die Würdigung seiner Verdienste auf dem Gebiet der mathematischen Grundlagen zeigt zugleich die Attraktivität der Mathematik und zielt auch auf ihre Popularisierung in der Öffentlichkeit.

2. KANT, FREGE und die Rolle der Mathematik

Ein großer deutscher Philosoph, der für Frege während seines Studiums im Mittelpunkt stand, war Immanuel KANT (1724-1804). Er sah in der Mathematik ein Vorbild für andere Wissenschaften. Von ihm stammen z.B. sinngemäß die folgenden Aussprüche zur Mathematik:

- Kein Volk mit **Ambitionen** kann ein Volk **mathematischer Analphabeten** sein.
- In jeder besonderen Naturlehre kann nur so viel **eigentliche Wissenschaft** angetroffen werden, als darin **Mathematik** anzutreffen ist.
- Jedes Wissen enthält so viel **Wahrheit** wie **Mathematik** in ihm enthalten ist.
- **Mathematik** ist eine Bedingung aller **exakten Erkenntnis**.

Sicher muss man KANT nicht uneingeschränkt zustimmen. FREGE hat diese allgemeinen Ansichten geteilt. In einzelnen Punkten hat er sich mit KANT a-

ber auch kritisch auseinandergesetzt. Im Gegensatz zu ihm hielt FREGE Zahlengleichungen wie $2+3 = 5$ einerseits für logisch beweisbar (analytische Urteile), aber deswegen noch lange nicht für trivial [Mayer96: S. 80f.].

3. Beiträge von FREGE zur Mathematik

FREGE hat in Göttingen 1873 zur Theorie komplexer Funktionen mit dem Thema „Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene“ promoviert. Bei komplexen Funktionen $y = f(x)$ sind sowohl die Argumente x als auch die Werte y komplexe Zahlen. In der Arbeit ging es vor allem um die geometrische Darstellung solcher Funktionen und um die Übertragung von Begriffen aus der Theorie reeller Funktionen.

Kurz darauf reichte FREGE die Arbeit „Rechnungsmethoden, die sich auf einer Erweiterung des Größenbegriffs gründen“ in Jena ein, mit der er 1874 bei dem Gründer der Carl-Zeiss-Werke Ernst ABBE habilitierte. In der Arbeit geht es um eine Erweiterung des Größenbegriffs auf beliebige Gegenstände. Hier findet man schon Ansätze für die Prädikatenlogik. Darüber hinaus werden aber auch Funktionen mit Hilfe von Iterationen (wiederholten Anwendung der Funktionen) untersucht (siehe z.B. [KREISER01: S. 86-130]).

FREGE hat auch zur Theorie halbgeordneter Gruppen beigetragen. Insofern hat er zumindest bis zu seiner Habilitation auf mathematischem Gebiet geforscht. Danach hat FREGE sich aber fast ausschließlich mit den *Grundlagen* der Mathematik auseinandergesetzt (*Metamathematik*, Wissenschaftsmethodologie).

4. Wurzeln der Mathematik

Eine Wurzel der Mathematik ist die *Geometrie*, die sich mit Raumformen beschäftigt und qualitativen Charakter hat. Sie wurde schon früh durch EUKLID (365-300 v.d.Z.) axiomatisiert. Viel später, zu Zeiten von GAUSS (1777-1855), kamen die ersten nichteuklidischen Geometrien auf. Damit war auch KANTs These von den apriorischen (euklidischen) Raumformen widerlegt. Eine moderne Axiomatisierung der euklidischen Geometrie stammt von dem großen Mathematiker HILBERT (1862-1943).

Die andere Wurzel der Mathematik ist die *Arithmetik*, die Zahlen zum Gegenstand hat und quantitativ orientiert ist. PLATON (427-347 v.d.Z.) betrachtete die Zahlen in Anlehnung an die Pythagoreer noch als geometrische Formen (Dreieck-, Quadrat-, Rechteck-, Fünfeckzahlen). Später erlangte die Arithmetik jedoch eigenständige Bedeutung. Ihre Axiomatisierung gelang erst durch PEANO (1891).

Beide Wurzeln der Mathematik wurden im Laufe der Geschichte immer wieder in einen engen Zusammenhang gebracht (natürliche Zahlen als geometri-

sche Formen, reelle Zahlen und Zahlengerade, Zahlenkoordinaten in der Analytischen Geometrie). In der modernen Mathematik gibt es auch auf höherer Ebene ein Wechselspiel von Qualität und Quantität.

Arithmetik und Geometrie haben nicht nur in der Frühphase von FREGEs Mathematikforschung, sondern auch bei seinen Versuchen zur Begründung der Mathematik eine wichtige Rolle gespielt.

5. Philosophische Fragen der Mathematik

Was sind überhaupt (natürliche) *Zahlen*? Diese Frage hat Mathematiker und Philosophen immer wieder beschäftigt. Sind sie freie Schöpfungen des menschlichen Geistes oder existieren sie auch außerhalb des (einzelnen oder allgemeinen) Bewusstseins? Und wenn ja, wo bzw. wie existieren sie:

- nur im Bewusstsein des Einzelnen (subjektiver Idealismus)?
- in einem Ideenreich (Platonismus)?
- direkt in der Wirklichkeit (Empirismus)?
- als Abbilder (Abstraktionen) der Wirklichkeit (Materialismus)?

Auch für FREGE war der Zahlbegriff ein wichtiger Ausgangspunkt seiner Überlegungen.

Welche *Existenzkriterien* sollte man fordern? Reicht vielleicht logische Widerspruchsfreiheit oder braucht man zur Absicherung darüber hinaus Konstruierbarkeit?

Wie *sicher* ist Mathematik überhaupt? FREGE rügte fehlerhafte Darlegungen in mathematischen Lehrbüchern. Vermutlich wäre er auch heute mit vielen Lehrbüchern nicht einverstanden. Er trachtete nach *Präzision* und *Perfektion*.

FREGE erkannte, dass die natürliche Sprache sehr anfällig gegenüber Missdeutungen und fehlerhaften Schlüssen ist. Die Benutzung umgangssprachlich formulierter logischer Argumente bei mathematischen Beweisen erschien ihm jedenfalls problematisch, weil dann immer Zweifel an der Korrektheit bleiben.

6. FREGEs Kritik am Zahlbegriff

FREGE stellte fest, dass der *Zahlbegriff* nicht klar war. Es gab in der Geschichte unzählige Beiträge dazu (Mystik, verschiedene Deutungen durch philosophische Strömungen, axiomatische Fassung, Fassung als formales Regelsystem), aber keine präzise inhaltliche Bestimmung. Auch die Begriffe und Axiome von EUKLID in der *Geometrie* waren keineswegs befriedigend. Es fehlten zudem zweifelsfreie Beweismittel. Die Schlussregeln der Logik (Syllogistik) gingen noch auf ARISTOTELES (384-322 v.d.Z.) zurück. Auch neuere Beiträge zur Logik hatten bisher keinen entscheidenden Durchbruch gebracht.

FREGE wandte sich gegen die zu seiner Zeit weit verbreitete Auffassung, dass Zahlen nur Sinneseindrücke sind. Die Zahl 0, die für Nichts steht, konnte für ihn nicht aus der sinnlichen Anschauung kommen. Auch das unbegrenzte Fortschreiten der Zahlenreihe sprach für ihn dagegen.

Selbst das Axiomensystem von PEANO lieferte ihm keine befriedigende Antwort. Es enthält zwei nicht näher definierte *Grundbegriffe*, nämlich 0 (erste Zahl) und Nachfolger '. Damit war z' die auf z folgende Zahl. Mit der Festlegung $z' = z+1$ lässt sich die Addition als wiederholte Nachfolgebildung erklären. Die Multiplikation ist nur eine verkürzt geschriebene mehrfache Addition.

Von einer *elementaren* Theorie der natürlichen Zahlen spricht man, wenn sie in der Prädikatenlogik erster Stufe formuliert wird. Das ist eine Logik, in der sich die verwendeten Quantoren „für alle x “ bzw. „es gibt ein x “ nur auf Individuen (hier: Zahlen) und nicht auf Mengen (von Zahlen) beziehen. Eine der bahnbrechenden Leistungen von FREGE bestand gerade darin, eine solche Logik entwickelt zu haben. Wir geben die Axiome von PEANO hier der Verständlichkeit wegen in Worten wieder, vermeiden also prädikatenlogische Formeln.

- 1) Die 0 ist eine natürliche Zahl.
- 2) Jede natürliche Zahl hat genau einen Nachfolger.
- 3) Die 0 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl.
- 4) Jede natürliche Zahl ist Nachfolger höchstens einer natürlichen Zahl.
- 5) *Induktionsprinzip*: Gilt eine Eigenschaft für die 0 und gilt sie mit einer natürlichen Zahl auch für deren Nachfolger, dann gilt sie für alle natürlichen Zahlen.

Was eine natürliche Zahl ist, wird hier von den axiomatisch festgelegten Eigenschaften beschrieben (und von nichts anderem). Mengen von Elementen (Strukturen), die diese Eigenschaften erfüllen, heißen *Modelle* des Axiomensystems. Ein Modell, das *Standardmodell*, ist die uns bekannte Menge der natürlichen Zahlen. Nun gibt es aber weitere Modelle mit ganz unterschiedlicher Struktur. Um diesen Nachteil auszuschließen, kann man die Axiome in einer *nichtelementaren* Theorie formulieren. Hier beziehen sich Quantoren auch auf Mengen. Statt 5) fordert man

- 5') Von allen Mengen, die die 0 und mit einem Element auch dessen Nachfolger enthalten, ist die Menge der natürlichen Zahlen die (bezüglich der Teilmengenbeziehung) kleinste.

Dann gibt es nur noch *strukturgleiche* Modelle. Die folgende Liste nennt zunächst die Menge, dann die erste Zahl (Zahl mit der Bezeichnung 0) und schließlich die Operation, die die Nachfolgebildung beschreibt:

- $\mathbb{N}, 0, +1$ natürliche Zahlen (Beginn: 0, Addition von 1),
- $\mathbb{N}, 1, +1$ natürliche Zahlen (Beginn: 1, Addition von 1),
- $2\mathbb{N}, 2, +2$ gerade natürliche Zahlen (Beginn: 2, Addition von 2),
- $(1/2)^n, 1/2, \cdot 1/2$ negative Zweierpotenzen (Beginn: $1/2$, Multiplikation mit $1/2$),
- $(a_n), a_0, n \rightarrow n+1$ unendliche Folge ohne Wiederholungen (Beginn: erstes Glied, Übergang zum Folglied).

Auch das ist für FREGE noch unbefriedigend, denn die natürlichen Zahlen sollen genau die Objekte sein, die wir beim Zählen von Gegenständen (Fingern, Äpfeln, Sternen) verwenden.

7. Philosophische Auffassungen von FREGE zur Mathematik

Ausgangspunkt war für FREGE die Philosophie von KANT. Die Objekte der Mathematik (wie z.B. die Zahlen) waren für ihn nicht nur im Einzelbewusstsein vorhanden, sondern auch in einem von der Wirklichkeit abgeleiteten Reich der Ideen, das intersubjektiv zugänglich ist, aber außerhalb physikalischer Wirkungen steht. Man spricht hier von *mathematischem Platonismus*, obwohl die Auffassungen nicht völlig mit denen des Ideenreiches beim antiken Philosophen PLATON übereinstimmen, das primär gegenüber der Wirklichkeit sein sollte. FREGE grenzte sich mit seiner Auffassung aber von psychologistischen und empiristischen Standpunkten ab, nach denen mathematische Objekte nur sinnliche Vorstellungen sind bzw. direkt in der Natur vorkommen. Entschieden kämpfte er aber auch gegen die Auffassung, dass Zahlen nur Figuren in einem Spiel sind, dessen Regeln die Axiome darstellen (Formalismus, Positivismus). Da Zahlen nicht wahrnehmbar sind, gehörten sie für ihn nicht unmittelbar zur Wirklichkeit. Zahlen waren seiner Meinung nach Begriffe, die definiert (eindeutig festgelegt) werden müssen, um ihnen eine klare Bedeutung zu geben.

Axiome waren für FREGE keine freien Erfindungen, sondern mathematische Reflektionen der Wirklichkeit. Deshalb war aus seiner Sicht EUKLIDSs berühmtes *Parallelenaxiom* entweder richtig oder falsch. Dabei glaubte er natürlich an seine Richtigkeit, d.h., zu einer Geraden g in der Ebene und zu einem außerhalb der Geraden liegenden Punkt P der Ebene gibt es genau eine zu g parallele Gerade, die P enthält. Hinsichtlich der Rolle der Axiome führte FREGE eine Auseinandersetzung mit HILBERT, jenem berühmten deutschen Mathematiker, der die Axiomatisierung der gesamten Mathematik betrieb. HILBERT sah Axiome nur als formale Postulate an.

Zur Sicherung der Mathematik entwickelte FREGE eine Sprache des „reinen Denkens“ (moderne Logik, axiomatische zweiwertige Prädikatenlogik). Er war andererseits der Überzeugung, dass diese Sprache überall zur Wahrheitsfindung anwendbar sein müsste (universelle Sprache im Sinne von LEIBNIZ), z.B. in der Philosophie oder bei politischen Argumentationen.

8. FREGEs Programm zur Sicherung der Mathematik

Die Schaffung einer geeigneten Logik(sprache) enthielt bei FREGE folgende Elemente:

- **Prädikatenlogik** (*Quantoren, Prädikate* als logische Funktionen mit Wahrheitswerten „wahr“ und „falsch“ nach dem Vorbild der mathematischen Funktionen, Bildung von Klassen von Gegenständen, die unter den gleichen Prädikatsbegriff fallen, d.h. eine gemeinsame Eigenschaft haben),
- **Axiomatisierung** (nach dem Vorbild des Axiomensystems von PEANO, Festlegung von zulässigen Schlussregeln),
- **Klärung der Bedeutung** von mathematischen Objekten wie den Zahlen aus der Logik (Semantik, Linguistik),
- **Rückführung der Arithmetik** (und damit der Mathematik) **auf die Logik.**

Klassen werden bei FREGE durch Prädikate $P(\cdot)$ beschrieben. Zu ihnen gehören alle Gegenstände x , für die die Prädikatwerte $P(x)$ „wahr“ sind. Klassen sind bei ihm Begriffsumfänge von Eigenschaften und damit selbst wieder Gegenstände. Sie entsprechen den *Mengen* in der Mengenlehre des Hallenser Mathematikers CANTOR (1845-1918). Dieser Geniestreich erwies sich später zugleich als Pferdefuß seines Programms.

FREGE definierte die Zahlen als spezielle Klassen (Gegenstände) und die Zahloperationen als Klassenoperationen. Damit war die Arithmetik aus der Logik erklärt. Da die Mathematik ihrerseits damals auf der Arithmetik fußte, war die Mathematik zu einem Teil der Logik geworden. Dieser Ansatz heißt *Logizismus*. FREGE skizzierte seine diesbezüglichen Ideen schon in seinem Werk „Die Grundlagen der Arithmetik“ aus dem Jahre 1884 [Frege88]. Die strenge Durchführung erfolgte in seinem Werk „Grundgesetze der Arithmetik“ (Band I: 1893, Band II: 1903) [Frege98].

9. Die natürlichen Zahlen bei FREGE und der Logizismus

Zahlen sind bei FREGE *Klassen* ähnlicher Klassen (Mengen gleichzahliger bzw. allgemeiner gleichmächtiger Mengen), d.h.

- 0 als Klasse aller Klassen ohne Element
- 1 als Klasse aller Klassen mit einem Element (alles Einfachen)
- 2 als Klasse aller Klassen mit zwei Elementen (alles Zweifachen)

usw.

Genauer benutzte FREGE eine logische Formulierung, nämlich für die Zahl 0 die Klasse des Begriffes „sich selbst ungleich“, unter den kein Gegenstand fällt, und für die Zahl 1 die Klasse des Begriffes 0, unter den genau ein Gegenstand fällt, nämlich die 0, usw.

Da die Nachfolgerfunktion und die vollständige Induktion logisch definierbar sind, gelangt man so zur Arithmetik der natürlichen Zahlen (im Sinne von PEANO). Bei diesem Konzept werden die Zahlenoperationen auf Mengenoperationen (Klassenoperationen) zurückgeführt (Addition auf Vereinigung und Durchschnitt).

Der Logizismus geht davon aus, dass die Mathematik eine Frucht der Logik, eine entwickelte Logik ist. Grundbegriffe der Mathematik lassen sich hiernach durch explizite Definitionen auf Grundbegriffe der Logik zurückführen, während mathematische Sätze durch logische Schlüsse aus logischen Sätzen hergeleitet werden [Heitsch76: S. 168f.]. Als Urvater des Logizismus wird LEIBNIZ (1646-1716) angesehen. Nach FREGE verfolgten auch RUSSELL (1872-1970) und CARNAP (1891-1970) logizistische Programme aus teilweise unterschiedlichen philosophischen Positionen (Platonismus, Empirismus, Positivismus) [Russell05: S. 387f.].

Der Logizismus stieß aber an unüberwindliche Grenzen. FREGE erkannte selbst, dass sich reelle Zahlen nicht als Begriffsumfänge definieren lassen. Er führte eine neue Sorte von Zahlen ein, so genannte *Maßzahlen*. Der Versuch, die Logik über die Arithmetik der natürlichen Zahlen hinaus auszudehnen, muss aus heutiger Sicht als gescheitert angesehen werden.

Es gab aber noch andere Einwände. Nach allgemeinem Verständnis gehörten *Existenzbehauptungen* nicht in das Gebiet der Logik. Es fällt auf, dass die Modelle von PEANOs Axiomensystem unendlich viele Elemente enthalten. Das Axiom 4 der natürlichen Zahlen erfordert die *Existenz unendlicher Mengen*. Beim weiteren Ausbau der Mathematik wird oft das *Auswahlaxiom* eingesetzt, nach dem man aus unendlichen Mengen einzelne Elemente herausnehmen kann, ohne ein Verfahren zur Hand zu haben, wie das geschehen soll. Dieses Axiom hat ebenfalls keinen logischen Charakter.

Weitere Fragen im Zusammenhang mit dem Logizismus sind:

- Was ist überhaupt *Logik*? Heute kennt man die verschiedenartigsten Logiken (mehrwertige Logiken, Fuzzy-Logik usw.). Welche Logik wird

jeweils benutzt? Diese Logiken stehen wiederum in Beziehung zu verschiedenen Zweigen der Mathematik.

- Was ist die *Basistheorie* der Mathematik, die auf die Logik zurückgeführt werden soll? Hier sind in der Geschichte Wandlungen eingetreten. Auch in Zukunft wird es dabei Änderungen geben.

10. FREGEs Scheitern

Schlimmer als das Scheitern des logizistischen Programms war aber das Scheitern von FREGEs Axiomensystem [Mayer96: S. 123f.]. Das Axiom V betrifft die Gleichheit von Klassen. Zwei Klassen P und Q heißen gleich, wenn die entsprechenden Prädikatfunktionen wertlaufsgleich sind (d.h. $P(x) = Q(x)$ für alle Gegenstände x). Schon frühzeitig empfand FREGE hier ein gewisses Unbehagen, weil sich der Unterschied von Begriffen und Gegenständen verwischt. Da Klassen (Begriffsumfänge) K selbst wieder als Gegenstände auftreten können, ist auch der Wert $K(K)$ zulässig. Aber hier gibt es eine *Rückbeziehung* von Eigenschaften auf sich selbst, oder anders ausgedrückt, es kommen Klassen vor, die sich selbst als Element enthalten. Die Katze beißt sich dabei in den Schwanz. RUSSELL teilte FREGE in einem Brief 1902 mit, dass die Klasse aller Klassen, die sich nicht selbst als Element enthalten, zu einem logischen Widerspruch führt. Für FREGE war diese Nachricht niederschmetternd. Er und andere versuchten daher, Axiom V abzuschwächen. Aber solche Änderungen erschienen willkürlich oder künstlich. Außerdem blieb unklar, ob nicht auch hier auf tieferer Ebene neue Widersprüche auftreten. Schließlich verwarf FREGE das Axiom ganz. Damit einher ging die Aufgabe des Klassenbildungsprinzips. FREGE schloss nun, dass Eigenschaften keine Klassen (Mengen, Gegenstände) sind. Er suchte Zuflucht in der Geometrie. Die Objekte der Mathematik mussten seiner Meinung nach geometrisch begründet sein.

11. CANTORs Mengenlehre

Parallel zu FREGEs Arbeiten schuf CANTOR seine Mengenlehre. Mit den Grundbegriffen *Menge* und *Element* konnte man die Objekte und Strukturen der Mathematik beschreiben. Die Mengenlehre entwickelte sich zur neuen Basistheorie der Mathematik. Die natürlichen Zahlen waren (analog zu FREGE) Mengen von gleichzähligen Mengen. CANTOR betrachtete die natürlichen Zahlen aber nicht als *potentiell unendlich* (offene, niemals abgeschlossene Menge), sondern als *aktual unendlich* (abgeschlossene Menge, die wieder als eigenständiges Objekt betrachtet werden kann). Mit der konsequenten Weiterentwicklung dieser Sicht kam er zu seinen *transfiniten Zahlen*, die im Unendlichen eine neue Skala von Kardinalzahlen und Ordinalzahlen darstellen. Die-

se „Vergewaltigung des Unendlichen“ hatte viele Gegner, die befürchteten, damit die Kontrolle zu verlieren und den Widersprüchen alle Türen zu öffnen. Noch auf dem Mathematikerkongress 1900 verkündete der große französische Mathematiker POINCARÉ, dass die Mengenlehre die Grundlage der gesamten Mathematik darstellt. Inzwischen waren aber von CANTOR selbst und anderen verschiedene logische Widersprüche in der Mengenlehre entdeckt worden (*Antinomien*, Konjunktionen einer Aussage und seiner Negation: $A \wedge \neg A$), z.B. bei der

- Menge aller Ordinalzahlen (CANTOR 1895),
- Menge aller Kardinalzahlen (CANTOR 1895),
- Menge aller Mengen (CANTOR 1899),
- Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, (RUSSELL 1902, ZERMELO um 1900).

Offenbar ist die Menge aller Mengen wieder eine Menge, und zwar eine, die sich selbst als Element enthält. Normalerweise enthält sich eine Menge nicht selbst als Element. Was ist aber nun mit der Menge aller solcher *normaler* Mengen. Nimmt man an, dass sie sich selbst als Element enthält, dann enthält sie sich nicht selbst als Element. Enthält sie sich andererseits nicht selbst als Element, dann enthält sie sich selbst als Element. Diese Antinomie von RUSSELL führte, wie schon erwähnt, auch zum Scheitern der Axiomatik im Logiksystem von FREGE [Heitsch76: S. 300f.]. RUSSELL erkannte jedoch den großen Wert von FREGEs Grundideen und setzte dessen logizistisches Programm fort.

12. Zu den Ursachen der Antinomien

Die Entdeckung der Antinomien stürzte die Mathematik in eine schwere Krise. Gerade die Wissenschaft, die Vorbild und Maßstab für andere Wissenschaften war, schien selbst auf tönernen Füßen zu stehen. Am Krankenbett der Mathematik wurden die verschiedensten Diagnosen gestellt und je nachdem die verschiedensten Therapien vorgeschlagen:

- Verbannung des *aktual Unendlichen* aus der Mathematik:
 - Objekte existieren nur, wenn man sie mit unzweifelhaften endlichen Methoden konstruieren kann. Diese Forderung führte zur *konstruktiven Mathematik* (Programm). Die philosophische Strömung heißt *Intuitionismus*.
- Einschränkung der Mengenbildung:

- Das lässt sich schon durch eine Präzisierung der (naiven) Mengendefinition von CANTOR erreichen [Heitsch76, S. 309f.].
- RUSSELL sah das Hauptübel in der Verwendung von *Zirkeln* (bei Definitionen und bei Schlussregeln). So plädierte er für deren Verbot. Er entwickelte eine Mengenlehre mit *homogenem Stufenaufbau* (Mengen von Individuen als Mengen erster Stufe, Mengen von Mengen erster Stufe als Mengen zweiter Stufe, und so weiter).
- Wie schon erwähnt, dachte FREGE über eine geeignete Modifizierung seiner Axiome nach, um bekannte Widersprüche auszuschließen. In der Mengenlehre wird heute meist das *stufenfreie* Axiomensystem von ZERMELO und FRÄNKEL benutzt. Es gibt auch Axiomensysteme, bei denen neben den Mengen *Unmengen* auftreten (KLAUA). Das sind gerade die widersprüchlichen Objekte, die von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen werden.

Werden die vorgenommenen Einschränkungen zu rigoros, so muss man in Kauf nehmen, dass die Mathematik wesentlich an Substanz verliert und deutlich komplizierter wird. In der klassischen Mathematik treten z.B. an verschiedenen Stellen Zirkel auf, ohne dass sichtbar Widersprüche auftreten. Die Hoffnung von RUSSELL, dass sich diese Zirkel auf anderem Wege alle vermeiden lassen, erwies sich als Wunschtraum. Ob die verschiedenen Reparaturversuche ausreichend sind, um generell Widersprüche auszuschließen, ist weiterhin fraglich.

Die folgenden Antinomien haben alle das gleiche Strickmuster (RUSSELL-scher Typ):

- Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten,
- Mann, der alle Männer rasiert, die sich nicht selbst rasieren,
- Buch, das die Titel aller Bücher zitiert, die ihren eigenen Titel nicht zitieren.

Das *Barbierproblem* ist schon seit der Antike bekannt. Die Liste zeigt, dass diese Antinomien semantischer Natur sind (die Bedeutung der Umgangssprache betreffen). Sie enthalten alle einen Zirkelbezug. Damit hängt die ursprüngliche Mengenantinomie von RUSSELL gar nicht ursächlich mit dem Begriff des aktual Unendlichen zusammen. Die übrigen Antinomien beziehen sich nämlich jeweils auf endliche Begriffsumfänge. Eine Aufgabe des aktual Unendlichen ist daher gar nicht notwendig.

13. Aktueller Stand

Die Mathematik ist nicht Teil der (mathematischen) Logik. Verschiedene Spielarten der Mathematik benötigen verschiedene Logiken (zum Schließen). Diese Spielarten unterscheiden sich teilweise auch in ihren Grundannahmen. Es gibt sie ohne und mit

- Satz vom ausgeschlossenen Dritten (klassische zweiwertige Logik),
- Induktionsaxiom (natürliche Zahlen),
- Auswahlaxiom (Mengenlehre),
- Kontinuumhypothese (Mengenlehre).

Nach dem *Satz vom ausgeschlossenen Dritten* ist eine Aussage entweder wahr oder falsch. Etwas Drittes gibt es nicht.

Die *Kontinuumhypothese* besagt, dass zwischen der Mächtigkeit der natürlichen und der reellen Zahlen keine weiteren Mächtigkeiten liegen.

Es gibt aber auch keine scharfe Trennlinie zwischen Mathematik und Logik. Teile der Logik kann man mit mathematischen Methoden erfassen (z.B. algebraische Fassung der Aussagenlogik durch BOOLE).

Die axiomatische Methode hat ihre Grenzen. Seit der Entdeckung *nichteuklidischer Geometrien* (LOBATSCHESKI 1829) ist klar, dass Axiome keine ewigen Wahrheiten darstellen, wie man lange glaubte.

Weitere einschneidende Erkenntnisse verdanken wir vor allem GÖDEL (1906-1978). Je nach dem zugrunde liegenden Modell sind verschiedene, teilweise auch miteinander konkurrierende Axiomensysteme denkbar. Die *Widerspruchsfreiheit* eines solchen Systems ist im Allgemeinen aber nicht im System beweisbar. Auf der anderen Seite gibt es aber relative Widerspruchsfreiheitsbeweise, z.B. das Verhältnis von Arithmetik und Geometrie betreffend. Die Arithmetik ist genauso sicher wie die Geometrie. Widersprüche in einem der Bereiche würden auch Widersprüche im anderen Bereich nach sich ziehen. Die *Vollständigkeit* eines Axiomensystems ist im Allgemeinen nicht erreichbar, insbesondere auch die der Arithmetik der natürlichen Zahlen nicht. Es gibt wahre Aussagen, die man im System nicht beweisen kann. Es gibt falsche Aussagen, die man im System nicht widerlegen kann. Trotzdem kann die Wahrheit (bzw. Falschheit) solcher Aussagen auf anderem Wege nachgewiesen werden (durch Erweiterung des Axiomensystems oder in einem entsprechenden Modell dieses Systems direkt). Neben dem *axiomatischen Schließen* gibt es auch ein *semantisches Schließen*. Eine Aussage A2 eines axiomatisierten Systems folgt semantisch aus einer anderen Aussage A1, wenn die Wahrheit von A1 in allen Modellen des Systems die Wahrheit von A2 bedeutet.

Mathematik hat einen hohen Grad der Verlässlichkeit. Es gibt aber zu keiner Zeit eine absolute Garantie für die Richtigkeit der (gesamten) Mathematik. Die moderne Mathematik ist sehr vielschichtig. Die Entwicklung der Mathematik ist ein unbegrenzter Prozess in alle Richtungen. Die Erschließung neuer An-

wendungen oder die Entwicklung neuer Disziplinen verändert auch die Mathematik.

FREGE hat mit seinen Untersuchungen zur Begründung der Mathematik Großes geleistet und viele neue Entwicklungen mit erstaunlichen Ergebnissen angestoßen. Seine Prädikatenlogik ist (in anderer Schreibweise) heute nach wie vor eine unverzichtbare Grundlage der modernen Mathematik (und der Informatik [Lämmel04]).

Literatur

- [Frege88] Frege, G., Die Grundlagen der Arithmetik. 1884. Hrsg. Christian Thiel. Felix Meiner Verlag, Hamburg 1988.
- [Frege98] Frege, G., Grundgesetze der Arithmetik. 2 Bde. 1893-1903. Nachdruck. Olms Verlag, Hildesheim 1998.
- [Heitsch76] Heitsch, W., Mathematik und Weltanschauung, Akademie-Verlag, Berlin 1976.
- [Kienzle06] Kienzle, B., Der Ursprung der modernen Logik und Semantik bei Gottlob Frege, Wismarer Frege-Reihe, Heft 02/2006, Hochschule Wismar 2006.
- [Kreiser01] Kreiser, L., Gottlob Frege, Leben – Werk – Zeit, Felix Meiner Verlag, Hamburg 2001.
- [Lämmel04] Lämmel, Uwe: Der moderne Frege, Wismarer Diskussionspapiere, Heft 01/2004, Hochschule Wismar 2004.
- [Mayer96] Mayer, V., Gottlob Frege, Verlag C.H. Beck, München 1996.
- [Russell05] Russell, B., Denker des Abendlandes, Gondrom Verlag, Bindlach 2005.
- [WIKI08] Gottlob Frege, Wikipedia 2008: http://de.wikipedia.org/wiki/Gottlob_Frege

Autor

Prof. Dr. rer. nat. habil. Dieter Schott

Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Gottlob-Frege-Zentrum

Hochschule Wismar

Philipp-Müller-Str. 14

D-23966 Wismar

E-Mail: dieter.schott@hs-wismar.de

Uwe Lämmel

WENN Frege DANN Logik

1 Gottlob Frege

Was ist es, das sich mit dem Namen Gottlob Frege verbindet, und weltweite Beachtung findet? Eine Antwort darauf gibt die Encyclopædia Britannica [EB98] im Band 4 der Mikropædia auf Seite 968:

„German mathematician and logician, who founded modern mathematical logic. Working on the borderline between philosophy and mathematics — viz., in the philosophy of mathematics and mathematical logic (in which no intellectual precedents existed) — Frege discovered, on his own, the fundamental ideas that have made possible the whole modern development of logic and thereby invented an entire discipline.“

Ein deutscher Mathematiker und Philosoph, der eine neue Wissenschaftsdisziplin begründet hat: die formale Logik – eine Disziplin, die heute in vielfältiger Weise praktische Anwendung erfährt.

In diesem Beitrag wird der Weg dieser Logik aufgezeichnet: Am Anfang steht der Wunsch oder die Notwendigkeit nach einem Mechanismus, der die Richtigkeit des menschlichen Denkens untersucht.

Anschließend wird die Idee Freges skizziert und die Weiterentwicklung dieser Ideen hin zu einer Technik, wie diese heute eingesetzt wird. Es werden Anwendungen, zum Teil alltägliche Anwendungen, aufgezeigt. Wir nutzen diese Logik tagtäglich, ohne uns dessen stets bewusst zu sein.

Die Formalisierung der Verknüpfung von Aussagen eröffnet die Möglichkeit, Aussagen mit Hilfe moderner Informationstechnik zu verarbeiten: Wir haben dem Computer das Denken beigebracht, zumindest einen kleinen Ausschnitt des menschlichen Denkens.

Den Abschluss bildet eine kurze Einführung in ein aktuelles Thema der Wirtschaftsinformatik: Mittels Geschäftsregeln können betriebliche Anwendungssysteme flexibel an sich ständig ändernde Anforderungen der Geschäftslogik angepasst werden. Ein Logik basierter Ansatz, den insbesondere große Unternehmen mit einer Vielzahl individueller Angebote verfolgen, um im Wettbewerb bestehen zu können.

Der Beitrag stellt sich das Ziel, die Leistung von Gottlob Frege auf dem Gebiet der Logik allgemeinverständlich darzustellen und ihre Bedeutung für unser Leben anschaulich zu machen. Gottlob Frege hat es verdient, stärker in das öffentliche Bewusstsein gerückt zu werden. Die Geschichte kennt nicht viele vergleichbare Persönlichkeiten.

2 Warum eine formale Logik?

Ist doch logisch! Diesen Satz kennen wir alle und haben ihn schon oft gesagt oder gehört. Wann ist etwas logisch? Wann ist etwas nicht logisch? Gibt es Regeln dafür, zu entscheiden, wann etwas logisch ist?

Bereits seit der Antike haben sich Philosophen mit diesen Fragen auseinander gesetzt. Die Entwicklung der Wissenschaft brachte es mit sich, dass Behauptungen geprüft werden wollten. Waren die Gedankengänge, war eine Beweisführung logisch, war diese korrekt? Man suchte nach einem Formalismus, der es ermöglichte Gedanken miteinander so zu verknüpfen, dass der neue Gedanke, bestehend aus der Verknüpfung anderer Gedanken, logisch korrekt, also richtig ist.

Die Logik als Wissenschaft befasst sich mit der „richtigen Verknüpfung der Gedanken im Folgern“. Andere Definitionen [MUL80] sprechen von der „Wissenschaft der Folgerungsrelationen“ oder „Wissenschaft, deren Gegenstand die Struktur des richtigen Denkens ist“. Betrachten wir zwei Gedanken:

1. Einige Wismeraner kennen Gottlob Frege.
2. Alle, die Gottlob Frege kennen, sind schlau.

Welche Verknüpfungen der beiden Gedanken lassen sich nun vornehmen, sodass ein neuer richtiger Gedanke entsteht? Welche der Folgerung(en) aus den beiden Gedanken 1 und 2 ist oder sind richtig?

- A. Alle, die schlau sind, kennen Gottlob Frege.
- B. Alle Wismeraner sind schlau.
- C. Einige Wismeraner sind schlau.
- D. Einige Wismeraner sind nicht schlau.
- E. Einige Schlaue sind Wismeraner.

Gesucht waren also Formalismen, die man anwenden kann, um damit die Behauptungen A ... E überprüfen zu können. Mittlerweile kennt man Folgerungsregeln, die eine formale Prüfung von Folgerungen möglich machen. Einen wesentlichen Beitrag zur Entwicklung dieser Logik leistete Gottlob Frege¹.

3 Die Logik des Gottlob Frege

Die Logik Freges wurde der Allgemeinheit durch die Veröffentlichung der

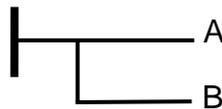
¹ Für das hier genannte Beispiel sind die von Aristoteles eingeführten Syllogismen ausreichend. Syllogismen sind Folgerungsregeln, die sich aus vier Mustern, so genannten Figuren, und dazu gehörigen 24 Modi ergeben.

„Begriffsschrift“² im Jahre 1879 bekannt gemacht ([Frege79]). Von Allgemeinheit darf man kaum sprechen, wird damals wohl kaum jemand den Text Gottlob Freges verstanden haben.

Ausgangspunkt in der „Begriffsschrift“ sind wiederum zwei Gedanken und deren mögliche Verknüpfung. Betrachten wir zwei Gedanken A und B . Frege nennt sie „beurtheilbare Inhalte“, heute sagen wir Aussagen. Aussagen können wahr oder falsch sein. Damit lassen sich vier Kombinationen der Wahrheitsgehalte der Gedanken, oder der „beurtheilbaren Inhalte“ bilden:

1. A wird bejaht, und B wird bejaht.
2. A wird bejaht, und B wird verneint.
3. A wird verneint, und B wird bejaht.
4. A wird verneint, und B wird verneint.

Wird nun der dritte dieser Fälle verneint und alle anderen bejaht, so wird diese Beziehung wie folgt dargestellt:



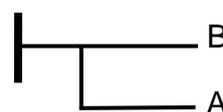
Nun fällt es sicher schwer, ohne weitere Erläuterungen die Bedeutung dieser Ausführungen zu erkennen. Die folgende so genannte Wahrheitswerte-Tabelle fasst das Gesagte zusammen und benennt die Kombination so, wie es mittlerweile üblich ist: „Wenn B , dann A .“

A	B	wenn B dann A
ja	ja	ja
ja	nein	ja
nein	ja	nein
nein	nein	ja

Wir können nun auch A und B vertauschen, und der Satz wirkt damit vertrauter:

A	B	wenn A dann B
nein	nein	ja
nein	ja	ja
ja	nein	nein
ja	ja	ja

wenn A dann B



Frege hat somit eine Formalisierung einer auch im Alltag häufigen

² Der Titel wird in der englischsprachigen Literatur nicht übersetzt! Es wird „Begriffsschrift“ gesprochen.

Verbindung zweier Aussagen vorgeschlagen: „Wenn A , dann B “ eine logische Verknüpfung, die als *Implikation* bezeichnet wird.

Betrachten wir ein weiteres Beispiel und gehen von folgenden Aussagen, den „beurtheilbaren Inhalten“ A und B aus:

A: Es regnet.

B: Ich gehe ins Kino.

Nun gibt uns die Wahrheitstabelle vor, wie der Wahrheitsgehalt der neuen Aussage ist: „Wenn es regnet, dann gehe ich ins Kino“.

Sind A und B beide falsch, das heißt, es regnet nicht und ich gehe nicht ins Kino, so bleibt der Satz „Wenn es regnet, dann gehe ich ins Kino“ dennoch richtig. Auch schließt der Satz „Wenn es regnet, dann gehe ich ins Kino“ nicht aus, dass ich ins Kino gehe, falls es nicht regnet. Nur wenn es wirklich regnet, dann muss ich auch ins Kino gehen, ansonsten ist die Aussage „Wenn es regnet, dann gehe ich ins Kino“ falsch.

Die Implikation, die Wenn–Dann–Beziehung, tritt uns im Alltag in vielfältiger Form entgegen als:

- Vorschrift: „Wenn die Ampel rot ist, dann ...“
- naturwissenschaftliches Gesetz: „Wenn Wasser auf 100° erhitzt wird, ...“
- Handlungsanweisung: „Wenn Sie von CD aufnehmen wollen, ...“
- Kontrollstruktur in Programmiersprachen:
„IF (Einkommen > Grundfreibetrag) THEN ...“
- Erklärung für Handlungen:
„Wenn ich ein über Frege spreche, dann spreche ich über Logik.“

Die Überschrift des Artikels „WENN Frege DANN Logik“ passt in diese von Gottlob Frege entwickelte logische Verknüpfung, wenn „Frege“ als „Ich spreche über Frege“ und „Logik“ mit „Ich spreche über Logik“ interpretiert wird. Wie wir oben gesehen haben, ist die Überschrift damit für alle Fälle korrekt, solange ich auch über Logik spreche, falls ich über Frege rede.

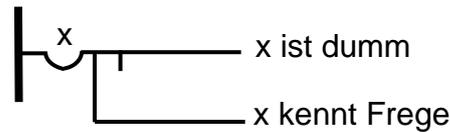
Die Wenn–Dann–Beziehung ist jedoch nicht ausreichend, um alle logischen Verknüpfungen zweier Aussagen zu beschreiben. Auch sind so genannte Quantifizierungen hilfreich, wie diese im ersten Beispiel des Beitrags auftreten: „Alle Wismeraner ...“.

In seiner Begriffsschrift führt Frege nun genau zwei weitere logische Verknüpfungen ein:

1. Die *Negation*: Eine negierte Aussage ist wahr, falls die ursprüngliche Aussage falsch ist.
2. Die so genannte *Allquantifizierung* von Objekten: „Für alle X gilt, ...“

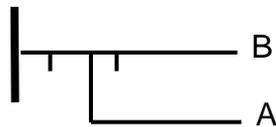
Damit kann in Anlehnung an das eingangs angeführte Beispiel im Stil Freges

formuliert werden: „Für alle Wismeraner gilt, wenn sie Frege kennen, dann sind sie nicht dumm.“



Erkennbar ist die Allquantifizierung von x , eine Negation wird als kleiner senkrechter Strich an der jeweiligen Aussage dargestellt.

Mit diesen drei Operationen *Implikation* (Wenn–Dann), *Negation* und *Allquantifikation* können alle Sachverhalte der klassischen zweiwertigen Logik³ dargestellt werden. Zur Illustration betrachten wir dazu die logische Verknüpfung „Und“: „A und B“. Diese kann mittels Implikation und Negation ausgedrückt und graphisch wie folgt dargestellt werden:



Die Interpretation der Graphik lautet: „Es gilt nicht, wenn A dann nicht B“. Es ist sicher nicht leicht zu erkennen, dass dieses der „und“-Vorstellung entspricht. Dem Leser wird es überlassen, anhand von Wahrheitwertetabellen (siehe oben bzw. den folgenden Abschnitt) den Sachverhalt zu überprüfen.

4 Die formale Logik heute

Als Purist hat Gottlob Frege sein Kalkül auf ein minimales Fundament aufgebaut. Alles Weitere lässt sich aus diesem Fundament ableiten. Leider ist dieses Konzept nicht nur für Mathematiker und Philosophen sondern erst recht für die Allgemeinheit schlecht handhabbar. Die heutige Schreibweise logischer Zusammenhänge, logischer Formeln, geht auf den italienischen Mathematiker Guiseppo Peano (1858-1932) zurück:

UND	\wedge	WENN-DANN	\rightarrow	FÜR ALLE	\forall
ODER	\vee	GENAU- DANN-WENN	\leftrightarrow	ES EXISTIERT	\exists
NICHT	\neg				

Damit können wir nun den vorherigen Satz „Für alle Wismeraner gilt, wenn sie Frege kennen, dann sind sie nicht dumm“ als logische Formel notieren:

$$\forall x: \text{kennt}(x) \rightarrow \neg \text{dumm}(x)$$

³ Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Die folgende Tabelle gibt die üblichen logischen Verknüpfungen als Wahrheitstabelle an:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$A \text{ XOR } B$
F	F	F	F		W	W	F
F	W	F	W	W	W	F	W
W	F	F	W	F	F	F	W
W	W	W	W		W	W	F

Da wir im alltäglichen Sprachgebrauch etwas großzügig mit der Logik umgehen, sei auf zwei Fälle besonders hingewiesen:

Wir neigen dazu, „und“ zu sagen aber eine „oder“-Verknüpfung zu meinen. Eine „und“-Verknüpfung ist nur genau dann wahr, wenn beide Teile, sowohl A als auch B wahr sind: „*Es wird Kaffee und Kuchen angeboten*“. Logisch betrachtet, kann es nun keinen Kaffee ohne Kuchen oder Kuchen ohne Kaffee geben. Logisch gesehen sollte es „oder“ lauten: „ A oder B “ ist auch dann richtig, wenn beides sowohl A als auch B richtig ist. Für das ausschließende Oder, das Entweder–Oder, hat sich die Bezeichnung XOR (exklusives Oder) eingebürgert.

Nun können wir im Alltag mit diesen „unlogischen“ Formulierungen als Menschen durchaus umgehen. Wenn wir aber den Computer einsetzen wollen, um auch logische Probleme behandeln zu können, muss die Alltagswelt durch exakte logische Formeln ausgedrückt werden.

Ohne die formale Logik, sind heutige Computer nicht denkbar: Die 0–1–Darstellung der Daten kann ebenso als logische falsch–wahr–Darstellung interpretiert werden. In der Schaltalgebra werden Signale miteinander verknüpft, man spricht auch von logischen Gattern. Diese bilden das Herzstück der Prozessoren. Arithmetische Operationen, wie Plus, werden auf die Kombination solcher Gatter zurückgeführt: Halbaddierer, Volladdierer.

Man sieht, formale Logik findet sich sogar in der Hardware eines Computers wieder. In der Programmierung ist die strukturierte Anweisung für die Alternative, die so genannte IF–Anweisung, in fast allen Programmiersprachen vorhanden:

```
IF a > b THEN a := a - b; { Programmiersprache PASCAL }
if ( a > b ) { a = a - b; } // Programmiersprache C oder Java
```

Aus der Mathematik sind Fallunterscheidungen bei der Definition von Funktionen bekannt:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Ansatz, zu programmieren, indem man Funktionen definiert, wird in funktionalen Programmiersprachen verfolgt. Dabei haben wir es dann wieder mit einer Anwendung der Wenn–Dann–Verknüpfung zu tun, wie hier in der Sprache Python⁴:

```
def ggT(a,b): if a==b: return a
              elif a>b: return ggT(a-b,b)
              else:   return ggT(a,b-a)
```

Mit einer weiteren praktischen Anwendung formaler Logik sind wir mittlerweile fast alle konfrontiert. Wir alle suchen nach Informationen im Internet⁵ und nutzen dazu Suchmaschinen wie *google*.

Werden mehrere Worte in die Suchmaske eingetragen, so sind diese Worte logisch gesehen, mittels „und“ verknüpft: Wir sind nur an Seiten interessiert, die alle Suchworte enthalten:

Diese Suche nach einem guten Spruch zum Thema Logik und Computer führt zu einer Ergebnisliste, bei der die erste Seite nur aus Hinweisen auf den folgenden Spruch von John Osborne besteht:

„*Der Computer ist die logische Weiterentwicklung des Menschen: Intelligenz ohne Moral*“.

Nicht zufrieden mit diesem Ergebnis, kann man die Suche einschränken, um alle Seiten mit diesem Spruch auszuschließen:

Damit werden nun alle Seiten angezeigt, die die ersten drei Suchworte aber nicht das Wort „*Weiterentwicklung*“ enthalten. Wir haben es also mit einer logischen Formel zu tun: $\text{Logik} \wedge \text{Computer} \wedge \text{Sprüche} \wedge \neg \text{Weiterentwicklung}$

Da einige Anbieter von Datenbanken die Gebühren für Anfragen nach der Menge der dabei übertragenen Daten berechnen, erspart also eine logische Formel, die das Gesuchte möglichst treffgenau charakterisiert, unnötige Kosten.

⁴ Die Sprache Python, die neben dem funktionalen auch andere Programmieransätze ermöglicht, ist bei der Programmierung von Web-Anwendungen weit verbreitet.

⁵ Korrekt ist: Wir suchen im World-Wide-Web (WWW). Das WWW ist ein Dienst, neben weiteren Diensten wie E-Mail, FTP im Internet.

5 Computer denken logisch

Neben diesen Anwendungen der Logik im und am Computer, gibt es seit vielen Jahren die Bestrebungen, dem Computer auch das *Denken* beizubringen. „Denken“ betrachten wir hierbei einschränkend als das logisch richtige Verknüpfen von Gedanken, hier Aussagen. Neben den Grundlagen der Logik, die von Gottlob Frege bereitgestellt wurden, ist hierbei die Arbeit von Robinson [Robinson65] zu erwähnen, der für eine bestimmte Form logischer Formeln eine Beweistechnik entwickelt hat, den Widerspruchsbeweis mittels Resolution. Betrachten wir ein Beispiel: Wir finden folgende Beschreibung einer Situation vor und haben zu entscheiden, ob diese Situation möglich ist:

1. Schmidt verlässt das Haus nicht ohne Meier.
2. Wenn Lehmann oder Schmidt das Haus verlassen, so verlässt es Meier nicht.
3. Schmidt verlässt das Haus.

An der automatischen Analyse von Texten wird derzeit gearbeitet, will man doch zum Beispiel die vielen Meinungen von Kunden, die in E-Mails, Weblogs oder Foren geäußert werden, zu auswertbaren Aussagen verdichten. Für das Beispiel werden wir die Formeln aus den Sätzen ableiten. Im Folgenden steht S für „Schmidt verlässt das Haus“, L und M analog:

1. Wenn S , dann M : $S \rightarrow M$
2. Wenn L oder S , dann nicht M : $(L \vee S) \rightarrow \neg M$
3. S

Nun können wir den Computer einsetzen und prüfen, ob hier ein Widerspruch vorliegt. Über einige Zwischenschritte⁶ zeigt sich, dass sich sowohl M – „Meier verlässt das Haus“ als auch $\neg M$ – „Meier verlässt das Haus nicht“ ableiten lassen. In unserer zweiwertigen Logik ist das ein Widerspruch:

- | | |
|---------------------------|--|
| 1. $\neg S \vee M$ | Aus der Verknüpfung von 1. und 3. mittels |
| 2.a: $\neg L \vee \neg M$ | Resolution erhält man: M . |
| 2.b: $\neg S \vee \neg M$ | Aus der Verknüpfung von 3. und 2.b mittels |
| 3. S | Resolution erhält man: ¬M . |

Heutzutage können mittels des Computers „beurteilbare Inhalte“ mechanisch miteinander verknüpft werden und auf diese Weise werden neue Aussagen abgeleitet. Das „Denken“ wurde mittels der formalen Logik „mechanisiert“ und kann dem Computer übertragen werden.

⁶ Eine Formel $A \rightarrow B$ wird durch die logisch äquivalente Formel $\neg A \vee B$ ersetzt.

6 Geschäftsregeln – eine aktuelle Anwendung Frege’scher Logik

In den letzten Jahren ist das Wort *Business Rule* (Geschäftsregel) zu einem Schlagwort geworden. Viele große Unternehmen setzen Business-Rules-Management-Systeme ein, um flexibler als vorher auf Marktanforderungen reagieren zu können. Viele, fast schon persönliche, Tarife in der Telekommunikation oder bei einem Energieversorger, die sich zudem immer häufiger ändern, stellen hohe Anforderungen an die entsprechende Software.

Immer neue, völlig anders strukturierte Tarife werden entwickelt, die von den IT-Systemen unterstützt werden müssen:

Was machen wir, wenn die Marketing-Abteilung einen neuen Tarif anbieten möchte, die notwendigen Daten aber nicht von der aktuellen Software erfasst werden können?

Der Software-Entwickler erhält einen Auftrag, neue Komponenten werden entwickelt und programmiert, das neue System muss getestet werden. Ein langwieriger und kostenintensiver Prozess. Hier sind flexiblere Lösungen erforderlich. In jedem Unternehmen existieren Regelungen für die ablaufenden Prozesse: für die Beschaffung, für die Vermarktung, für die Kundenbeziehungen oder für die Abrechnung.

Die Geschäftsregeln sind vorhanden, sie sind jedoch nicht einheitlich formuliert, sondern verbal in Arbeitsanweisungen, in Betriebsvereinbarungen, in staatlichen Regelungen festgehalten oder auch in IT-Systemen implementiert.

Die vorhandenen Regelungen werden nun explizit gemacht und damit einer automatisierten Verarbeitung zugeführt. Der Geschäftsregel-Ansatz geht davon aus, dass Festlegungen in Form von Wenn–Dann–Regeln beschrieben werden:

- WENN Kunde DANN auf Rechnung versenden.
- WENN noch kein Kunde DANN mit Nachnahme versenden.
- WENN guter Kunde DANN Rabatt gewähren.
- WENN Umsatz im Jahr > 100.000 DANN guter Kunde.

Diese Regeln sind so nicht genau genug, sie müssen weiter formalisiert werden, z.B.: WENN X ist_Kunde DANN auf_Rechnung=true.

Dabei wird bei den Geschäftsregeln davon ausgegangen, dass alle auftretenden Variablen allquantifiziert sind. Somit wird diese Quantifizierung nicht mehr aufgeführt.

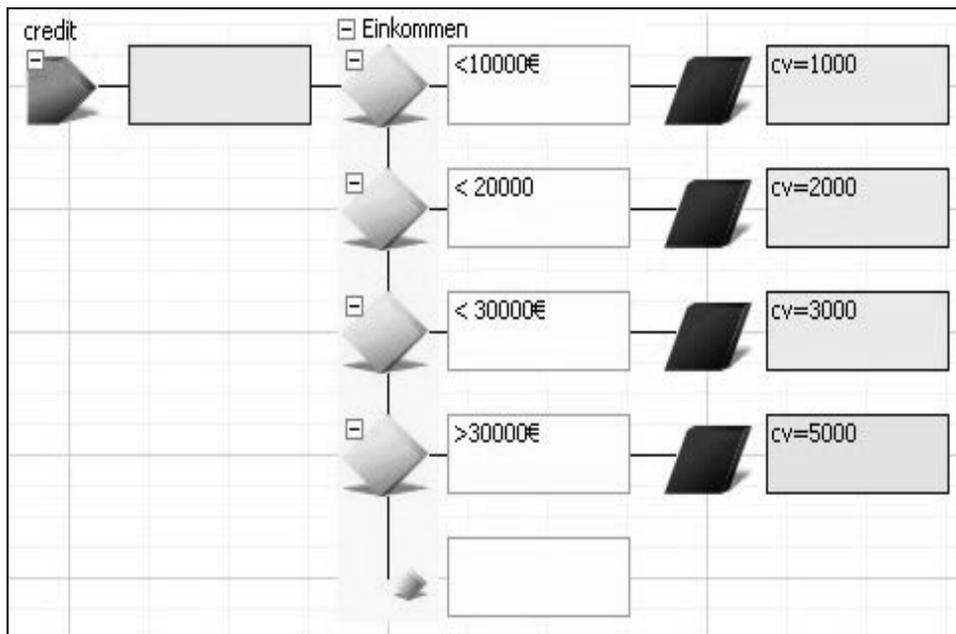
Natürlich wird bei der Auswertung der Regeln auf vorhandene Datenbanken in den Unternehmen zurückgegriffen. Diese regelbasierte Wissensdarstellung, die eine seit langem bekannte Technik der künstlichen Intelligenz ist, wird heute eingebettet in modernen graphisch interaktiven Entwicklerwerkzeugen angeboten, Abbildung 1.

Das Ganze sieht so einfach aus, so dass man sich wundert, warum man erst

jetzt die Geschäftsregeln explizit notiert und mit dem Computer verarbeitet. Es sind zwei Schwierigkeiten, die dabei zu beachten sind:

1. Die Verarbeitung von Regeln durch eine Software ist nicht trivial. Die Auswahl geeigneter Regeln sowie die Verknüpfung der Regeln müssen so erfolgen, dass die Gesetze der Logik eingehalten werden. Zudem hat diese Verarbeitung sehr schnell zu erfolgen. Business-Rule-Systeme müssen durchaus einige 100.000 Regeln bearbeiten.

Abbildung 1: Graphischer Regel-Editor



Quelle: Visual Rules, www.visual-rules.de

2. Die zweite Schwierigkeit ist personeller Art: Die Denkweise muss sich ändern. Tarife, Abläufe, Kundenbeziehungen, all das muss nun in Wenn-Dann-Regeln ausgedrückt werden. Hier sind neue Denkmuster gefragt. Nur dann kann der Vorteil dieser Regel-, somit Wissensverarbeitung voll genutzt werden. Der Vorteil hier: Man muss kein Programmierer sein, um Regeln aufstellen zu können.

Der Geschäftsregel-Ansatz wird heute insbesondere in großen Firmen für in folgenden Bereichen eingesetzt:

- Geschäftslogik (Preise, Tarife, ...),
- Workflow (Arbeitsabläufe),
- Kundenbeziehungen,
- Validierung und Verifizierung von Daten.

Auf den Seiten der Anbieter von Business-Rules-Management-Systemen lassen sich eine Vielzahl von Referenz-Anwendungen in ganz unterschiedlichen

Bereichen finden:

- Finanzdienstleistung (Kreditvergabe, Bewertungen, Zinshöhe)
- Telekommunikationsunternehmen (Tarife)
- Reisebüro (Auswahl nach Kundenwünschen)
- Pensionsberechnung
- Produktionsplanung und -steuerung
- Marketing (Ebay)

Wir stellen fest, dass die formale Logik, die Frege vor über Hundert Jahren entwickelt hat, sehr lebendig und hochaktuell ist. Wissen auf dem Gebiet der Logik ist erforderlich, um die vielen Anwendungen mit Leben zu erfüllen. Zunehmend werden auch Berufsgruppen, wie Betriebswirte und Ingenieure damit konfrontiert, ihr Wissen in Form von Wenn–Dann–Regeln explizit auszudrücken.

7 Schlusswort

Mittlerweile ist die 6. Auflage der Neuausgabe aus dem Jahre 1964 der Begriffsschrift von Gottlob Frege aus dem Jahre 1879 erschienen. Auch dies ist ein Beweis für die Lebendigkeit seiner Ideen.

Die Ideen Freges sind lebendig, wir finden sie in der Hard- und Software unserer Computer und wir nutzen die Logik im Alltag und im Umgang mit dem Computer, eine Logik, die von ihm begründet wurde.

Literatur

- [EB98] Encyclopædia Britannica, 1998, Micropædia, Band 4, Seite 968.
- [Frege79] Gottlob Frege: Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Halle/Saale 1879, in G. Frege: Begriffsschrift und andere Aufsätze, 6. Nachdruck der 2. Auflage von 1964, Georg-Olms-Verlag, Hildesheim u.a. 2007.
- [Lämmel04] Lämmel, Uwe: Der moderne Frege. Wismarer Diskussionspapiere Heft 01/2004, Hochschule Wismar 2004
- [MUL80] Meyers Universal Lexikon in vier Bänden, Leipzig 1980
- [Robinson65] J. Alan Robinson: A Machine-Oriented Logic Based on the Resolution Principle. Journal of the ACM (JACM), 12 (1965) 1, 23–41.

Autor

Prof. Dr.-Ing. Uwe Lämmel

Fakultät für Wirtschaftswissenschaften, Gottlob-Frege-Zentrum
 Hochschule Wismar, Philipp-Müller-Str. 14, D-23966 Wismar
 E-Mail: uwe.laemmel@hs-wismar.de

Heinz-Helmut Bernd

Hauptfach Mathematik. Über Neuhumanismus, Wertewandel und heutige Befindlichkeiten. Gottlob Frege – Bildungsbürger im Systemwechsel

1. Wegmarken im fortgeschrittenen bürgerlichen Zeitalter

*"Habe nun, ach! die Philosophie,
Medizin und Juristerei
Und leider auch die Theologie
Durchaus studiert mit heißer Müh ... "*

In dieser wohlbekannten Klage des Dr. Heinrich Faust, die dessen Universalgelehrtheit zu Beginn der Tragödie herausstellt, findet sich implizit die Universität des ausgehenden Mittelalters mit ihren vier Fakultäten wieder. Der Wandel, dem die erstzitierte **Philosophische Fakultät** Jahrhunderte später in dem Zeitraum unterlag, der etwa Goethes Lebenszeit (1749 – 1832) entspricht, ist eng mit der Entstehung des regulären Universitätsstudiums der Mathematik und Naturwissenschaften verknüpft.

Obwohl eine der ältesten Wissenschaften überhaupt, ist die Mathematik jahrhundertlang nur in ausgesuchten Fällen im Zusammenhang mit anderen, meist philosophischen, astronomischen, mechanischen o.ä. Anwendungen an Universitäten gelehrt worden; **Mathematik als Hauptfach** zu studieren (evtl. mit einer Naturwissenschaft verbunden), ist an Universitäten seit etwa 200 Jahren möglich. Ein auch nur angenähert den heutigen Vorstellungen entsprechendes akademisches Studium der Mathematik ist historisch erst im Verlauf des 18. Jahrhunderts in Einzelfällen belegbar: So hat der 18-jährige **Carl Friedrich Gauß**, der sich 1795 als "matheseos cult." an der Universität Göttingen einschreiben ließ, dort zunächst neben den Mathematikvorlesungen Abraham Gotthelf Kästners, die ihm manche Kritik abnötigen (Kästner war damals bereits 76 Jahre alt), mit großem Interesse klassische Philologie gehört. Der Wissensdurst des Heranwachsenden war offenbar nicht einseitig oder ausschließlich auf die Mathematik gerichtet, denn über die drei Jahre zuvor, die Gauß am Braunschweiger Collegium Carolinum verbrachte, wird bezeugt: *"Es verdient angemerkt zu werden, daß Hr. Gauß ... sich hier in Braunschweig mit ebenso glücklichem Erfolge der Philosophie und der klassischen Literatur als der höheren Mathematik gewidmet hat"* [1]. (Aus dem Collegium Carolinum ging später die Technische Hochschule hervor.)

Typisch für die damaligen europäischen Mathematikerkarrieren war, insbesondere in den Zeiten vor Gauß, daß die mathematische (Aus)Bildung, ange-regt infolge selbstverspürter Neigung, Leidenschaft und Förderung (letzteres in den glücklichen Fällen wohlwollender Talenterkennung), durch Selbststudien, z.T. jahrzehntelang aufrechterhaltenen Korrespondenzen und Privatun-terrichtung ("Meister/Schüler"), die oft mit heute kaum vorstellbarer Intensität betrieben wurden, zustande kam bzw. sich vervollkommnete.

Die in der jeweiligen Zeit maßgebende kulturelle bzw. materielle Situation veranlaßte die Akteure in der Regel zum Studium an einer oder mehreren der klassischen Fakultäten (Theologie, Jura, Medizin, auch Philosophie), um da-durch die Befähigung zur Ausübung eines traditionellen akademischen "Brot-berufes" außerhalb der Mathematik zu erlangen. Die Publikation der For-schungsergebnisse, oft nur durch Privatmitteilungen, Tagebücher, Randnoti-zen o.ä. überliefert, erfolgte – wenn überhaupt – über Akademien ("gelehrte Gesellschaften") oder andere Förderer, auch auf eigene Kosten, nicht jedoch durch Universitäten.

Eine Ausnahmeerscheinung wie Gauß, des "princeps mathematicorum", von seiner Bedeutung gleichrangig mit Archimedes, Galilei und Newton, kann keinesfalls als typischer Vertreter oder als Beispiel für eine Entwicklung he-rangezogen werden, wenn auch die Eckdaten des weiteren Verlaufes seines Studiums heutige Bildungspolitiker dazu verführen könnten(!): Ab 1796 kon-zentrierte er sich auf Mathematik, Physik und Astronomie, betrieb also ein modern anmutendes dreijähriges (Fach)Studium bis zur Promotion 1799. Die-se Studienzeit kann mit Recht auch als Forschungsetappe im Leben des jungen Gauß charakterisiert werden. Seine außergewöhnlichen mathematischen Vor-kenntnisse, die gute Auffassungsgabe, auch für die alten und neuen Sprachen, seine hohe Selbstdisziplin, Konzentrations- und Abstraktionsfähigkeit, die ihn zu hauptsächlich autodidaktischer Arbeit mit großer Wirksamkeit befähigten, vor allem aber seine in diesen Jahren erzielten wissenschaftlichen Resultate weisen ihn bereits als Forscher von Rang aus. Gleichwohl spielte das intellektuelle **Göttinger Universitätsumfeld** auch in der Persönlichkeitsentwicklung von Gauß eine Rolle: In hohem Maße ansprechend, nützlichkeitserwartend und unabhängig von einzelnen Biographien, repräsentierte es die epochale geistesgeschichtliche Strömung der **Aufklärung** und ein Bildungsmodell in seinen Anfängen, das später die Bezeichnung **Neuhumanismus** bekommen sollte.

1.1 Lichtseiten des Neuhumanismus

Zu den Ausgangsstätten der deutschen Aufklärung gehören die 1694 in Hal-le/Saale und die 1737 in Göttingen gegründeten protestantischen Universitä-ten, für deren Fakultäten Gleichberechtigung, also Abschaffung der anderen-

orts seit Jahrhunderten bestehenden akademischen Führungsrolle der theologischen Fakultäten, proklamiert wurde. Den Ordinarien in Halle und allen Professoren in Göttingen sicherten ihre obrigkeitlichen Gründer zudem Zensurfreiheit zu. Charakteristisch für diese beiden sogenannten Reformuniversitäten war der praktizierte **Rationalismus**, der als moderne philosophische Strömung deutlich den scholastischen Denk- und Unterrichtsmethoden der durch den Katholizismus geprägten alten Universitäten gegenüberstand. Bedeutende Geistesgrößen der damaligen Zeit (u.a. Herder, Lessing, Goethe, Schiller) sowie einflußreiche Professoren, Pädagogen und Politiker (z.B. Wilhelm von Humboldt), sahen in der Wiederentdeckung der antiken Welt, ihrer Sprachen, Kunst und Kultur, die Möglichkeit, ein **Idealbild vom Menschen** erzieherisch zu vermitteln. Die durch das Anstreben an das **Muster einer vollendeten Erscheinung** geschulten "Geistes- und Gemütskräfte" können dem Ungeist, den Vorzügen und auch eventuellen Misereen jeder aktuellen Zeit (also nicht nur auf die napoleonische Fremdherrschaft bis 1813 beschränkt) durch **intellektuelle Abgehobenheit und kritische Distanz** ein Schutzschild entgegenhalten.

Die aufklärerisch-neuhumanistischen Wesenszüge waren nicht nur für die 1809/10 gegründete Berliner Universität charakteristisch, sie beeinflussten auch die gesamte **preußische Bildungsreform**, die durch Wilhelm von Humboldt unter dem Einfluß von Friedrich Schleiermacher, Johann Gottlieb Fichte u.a. in diesen Jahren eingeleitet wurde. Als "neue Universitätsidee", mit Humboldts Namen verbunden, gelten die bis heute in fast jeder Erörterung über prinzipielle, inhaltliche oder organisatorische Hochschulfragen wiederzufindenden, dem Selbstverständnis deutscher Akademiker aller Disziplinen seit über einem Jahrhundert entsprechenden berühmten Postulate:

- **Einheit und Freiheit von Lehre und Forschung**
(Universitätslehrer und Forscher in Personalunion, Lehr- und Lernfreiheit, politische Unabhängigkeit vom Staat trotz staatlicher Alimentation der Universität)
- Einheit aller nicht zu den Fakultäten Theologie, Jura und Medizin gehörenden Wissenschaften unter dem Dach einer unabhängigen **philosophischen Fakultät**, der auch die **Mathematik** und alle **Naturwissenschaften** zugeordnet sind
- **Zweckfreiheit der Wissenschaft**
(Vorrang des wissenschaftlichen Studiums an sich ("um seiner selbst willen"))
- wahre ("sittliche") Persönlichkeitsentfaltung durch Bildung

Obwohl in unseren Tagen die universitätsreformerische Wirkung dieser vielzitierten Idealvorstellungen erneut angezweifelt wird [2], förderten die zu

Beginn des 19. Jahrhunderts von Preußen ausgehenden administrativen Vorgehensweisen zur Öffnung der philosophischen Fakultäten und zur Schaffung institutionalisierter Voraussetzungen für den Universitätszugang nachweislich die Entwicklung einer sich in dieser Zeit vergrößernden und an Bedeutung gewinnenden Bevölkerungsgruppe, die das intellektuelle Leben – in Deutschland über mindestens drei Systemwechsel hinweg – bis in die erste Hälfte des 20. Jahrhunderts buchstäblich verkörpert hat: Das **Bildungsbürgertum**.

Grundlage fast jeder (bildungs)bürgerlichen Karriere im 19. Jahrhundert war das **humanistische Gymnasium**, das infolge der Bildungspolitik nach 1810 nicht nur in Preußen einen zunehmend wichtigen, wenn nicht sogar den zentralen Platz in der deutschen Bildungslandschaft einnehmen sollte. Als "Ort der Allgemeinbildung und der Wissenschaftspropädeutik" waren es nach dem Königsberger Schulplan die vier Hauptfächer Latein (76 Std.), Mathematik (60 Std.), Griechisch (50 Std.), Muttersprache (44 Std.) und die Nebenfächer Geschichte und Geographie (30 Std.), Naturwissenschaften (20 Std.) sowie Religion und Gesang (20 Std.), die von den für die späteren Eliten vorgesehenen Kandidaten zu bewältigen waren (diese Gesamtwochenstundenzahl von 300 Stunden über alle Gymnasialjahre ist gegenwärtig auf etwa 250 Std. abgesunken). Um Vergleichbarkeit zu sichern, sind in den Jahren 1810 bis 1816 gesetzliche Bestimmungen ("Edikte") über die Prüfung der Schulumtsanwärter, die Abiturientenprüfungen und über die Gymnasiallehrpläne erlassen worden.

"Allein in Preußen ... stieg zwischen 1822 und 1846 die Zahl der Gymnasiasten um ca. 75% ... Damit einher ging eine Verwissenschaftlichung des Lehrerberufs. Staatliche Prüfungsordnungen schraubten die Anforderungen immer höher. Um die Jahrhundertmitte hatte jeder Gymnasiallehrer ein Studium von mindestens sechs Semestern an einer philosophischen Fakultät absolviert, das getreu dem Ideal von der Bildung durch Wissenschaft keinerlei Unterschied zwischen der Ausbildung zum Lehramt oder der zum künftigen Wissenschaftler kannte. **Wer die Wissenschaft beherrscht, kann auch lehren** – nach dieser Maxime identifizierten sich die neuen Oberlehrer immer stärker mit der Universitätswissenschaft" [3].

Die philosophischen Fakultäten, von alters her die Vorschulen des Theologie-, Jura- oder Medizinstudiums, in denen unter anderem auch Mathematik und "Naturlehre" vermittelt wurde, die letzteren zur allgemeinen Bildung künftiger Geistlicher, Richter oder Ärzte, oft durch Professoren, die diese Fächer "nebenher" vertreten haben, erhielten in der neuhumanistisch-reformierten Universität dieser Zeit eine zuvor nicht bestehende Autonomie: Ihnen oblag die Ausbildung der Gymnasiallehrer, des "höheren Lehrerstandes".

Die Erhebung der Mathematik zu einem gymnasialen Hauptfach war äußerst förderlich für die Entwicklung der deutschen Universitätsmathematik

und gehört als **erstrangige Kulturleistung** auf die "Lichtseite" des Neuhumanismus.

Der zuvor zitierten Verwissenschaftlichung des Studiums (der Begriff ist hier durchweg positiv besetzt) diente die **Einführung der Seminare**. Ursprünglich eine nichtakademische Lehr(institutions)form für die Heranbildung von Volksschullehrern, ist 1810 an der Berliner Philosophischen Fakultät ein Universitätsseminar für philologische Fächer eingerichtet worden.

Die Gründung der **mathematisch/physikalischen akademischen Seminare** setzte ein Jahrzehnt später ein und zog sich bis ins letzte Viertel des 19. Jahrhunderts hin, z.B.: Heidelberg 1824, Bonn 1825, Königsberg 1834, Tübingen 1869, ..., Rostock 1879.

Im Seminar wurde es den oft in geringer Anzahl teilnehmenden Studenten möglich, die wissenschaftliche Arbeit im Detail zu erlernen, zu üben sowie im persönlichen Kontakt mit betreuenden Hochschullehrern bzw. Beauftragten durch Problemstellungen, die z.T. den Kenntnissen der Bearbeiter individuell angepaßt wurden, oder durch Preisaufgaben den Stand des Wissens einer Disziplin kennenzulernen. Ein bis heute erstrebenswerter Entwurf!

Zu den Seminaren gehörten eigene Räume und Ausstattungen, z.B. Bücher. Über die Lehraufgaben hinaus hatten sie administrative und kontrollierende Funktionen. (Akademische Seminare existieren nach wie vor an Universitäten; in sehr vielen Fällen waren sie direkte Vorgänger späterer **Institute**, deren Gründung meist im 20. Jahrhundert erfolgte, teilweise erst nach dem 2. Weltkrieg.)

Spätestens im Verlauf der 1830er Jahre setzte sich die Emanzipation der Mathematik als eigenständige Fachwissenschaft durch. Insbesondere haben **Carl G. J. Jacobi** u.a. den Auffassungen, Mathematik in erster Linie als Hilfswissenschaft für spezielle Anwendungen zu verstehen, erfolgreich entgegengewirkt und mit ihren Arbeiten, den neuhumanistischen Thesen entsprechend, auch die Mathematik "um ihrer selbst willen" zu betreiben und weiterzuentwickeln, der **reinen Mathematik** bedeutende Anstöße gegeben, die auch den Gymnasialunterricht nicht unberührt ließen: Gymnasial- und Hochschullehrer hatten in diesen Jahren einen vergleichbaren Stand – auch die "höheren Lehrer" galten als Gelehrte –; diese Äquivalenz war durchaus berechtigt, da nach einer 1824 in Preußen eingeführten Regelung zur Förderung der wissenschaftlichen Arbeit von Lehrern **aus dem Lehrkörper jedes Gymnasiums jährlich eine wissenschaftliche Abhandlung veröffentlicht werden mußte (!)**. (An dieses heute wenig bekannte "Schulprogramm" hat Gert Schubring in [4] erinnert.)

Weiterhin spiegelt sich die "Lichtseite" des Neuhumanismus, bezogen auf die exakten Wissenschaften, in Folgendem wider:

- **Mathematik und Naturwissenschaften werden** (neben anderen Disziplinen) **zum Beruf**.
- Gymnasien und Universitäten sind vergleichbar strukturiert und inhaltlich wie administrativ eng verknüpft.
- Das Studium endet mit dem **Examen zum Lehramt an Gymnasien**; etwa zeitgleich kann mit einer mathematischen oder naturwissenschaftlichen Dissertation der "**moderne**" **Dr. phil.** erworben werden. (Die Neuheit dieses Doktorgrades erklärt sich aus der Reform der philosophischen Fakultäten nach 1810; der heute übliche "Dr. rer. nat." wurde 1934 eingeführt, der Diplomgrad "Dipl.-Math." erst 1942.)

Nur durch die 1816 zunächst in Berlin eingeführte Pflicht zur **Habilitation** unterschieden sich die äußerlichen Qualifikationsanforderungen für künftige Professoren von denen der Gymnasiallehrer; der Aufstieg vom Gymnasial- zum Hochschullehrer war durchaus möglich, wie die Biographien von **Karl Weierstraß** u.a. zeigen –, in Einzelfällen gibt es dafür bis heute Beispiele.

Das Ablegen der Prüfungen zum "Höheren Lehramt" war auch bei denjenigen üblich, die nicht beabsichtigten, Gymnasiallehrer zu werden, selbst in den Jahren nach 1870, als das Mathematikstudium die heutigen Formen annahm (Aufspaltung in **forschungsorientierte** und **schulorientierte** Studienrichtungen). Außerdem erfolgte im letzten Drittel des 19. Jahrhunderts die **Trennung von reiner und angewandter Mathematik**.

- Entstehung bedeutender Mathematikzeitschriften (Crelle 1826, Grunert 1841, Schloemilch 1856).
- Ab ca. 1830 erreicht die Mathematik in Deutschland einen Höhepunkt ihrer Geltung und entwickelt sich zur modernen Wissenschaft. *"Die deutschen Mathematiker überholen im Ansehen die Franzosen und wurden international führend."* [4].
- Weltweite Akzeptanz des deutschen Reformuniversitätsmodells; Kopien in England und den USA; vor allem beeindruckte die deutsche **Universitätsforschung**, die mit "Ph.D."-Studienabschnitten nachempfunden wurde.
- Die deutsche Sprache löste um 1850 Latein als internationale Wissenschaftssprache ab; ... *"spätestens in der Jahrhundertmitte lernte jeder junge Mann, der eine wissenschaftliche Laufbahn einschlagen wollte, selbstverständlich Deutsch"* (Allan Chapman in [4]).
- Gründung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (1890).

1.2 Schattenseiten des Neuhumanismus

1.2.1 Von Eliten und Heldendenkmälern

Auch die kritischen, nicht erst in der Jetztzeit bedenkenenerzeugenden Seiten der bildungsbürgerlich-neuhumanistischen Ideen einschließlich ihrer Umsetzungsbemühungen sind – mit einigen Variationen – generationenübergreifend wirksam geblieben:

- Vor allem ist es der **Elitegedanke**, in dessen Gefolge **Spaltung** und Entfremdung erscheinen, nicht weit entfernt auch jene **verhängnisvolle Überhebung**, die auf den zu keiner Zeit fehlenden geistigen Nährböden unterschiedlichster Herkunft gedeiht.
- Die Wirklichkeit beim Anstreben der dem Bildungsideal innewohnenden "Suche nach der wahren menschlichen Natur" auf den von der Klassischen Antike markierten Wegen, zeitnah berührt durch den Deutschen Idealismus, die Weimarer Klassik und die Romantik, führte insbesondere bei der bürgerlichen Jugend zur Ausformung eines geistigen Erscheinungsbildes mit deutlichen Freiräumen für **idealisierte Heldenverehrung** und **-verklärung**, **mythische Überhöhung**, **Realitätsferne**, **Sehnsucht nach vermeintlich lebenswerteren vergangenen Epochen**, Aufgeschlossenheit für **politische Mythen** jedweder Art und Neigung zu **exaltierter Schwärmerei**.

Diese für die gebildeten Schichten Europas im 19. Jahrhundert zeittypischen Gemütsregungen, oft als "speziell deutsch" charakterisiert, erfahren in der Erschaffung von **Helden** und **Heldendenkmälern** bzw. –bildern eine abrufbare Reflexion, wobei die insbesondere nach der Reichsgründung 1870/71 in Bronze oder Stein ausgeführten Monumente hier weniger interessieren als die in den **Seelen der Bildungsbürger verinnerlichten, "vergeistigten" Abbildungen** vom erstrebenswert Wahren bis zum abgrundtief Bösen, bezeichnenderweise ohne Zwischenstufen: Diese emotionalen, stark kontrastierenden Vorstellungen von beispielsweise "edlen Recken und finsternen Schurken"(!), "Lichtgestalten" o.ä., auf historische Personen und Ereignisse projiziert, haben ihre grundsätzliche Wirkung auf die Denkweise und das Wertgefüge über die Höhen wie die Katastrophen des 20. Jahrhunderts hinweg, unabhängig von politischen oder religiösen Standorten, bis heute beibehalten.

Der Philologe Victor Klemperer notiert als Zeitzeuge und Verfolgter während des dunkelsten Kapitels der deutschen Geschichte hierzu: *"Denn alles, was den Nazismus ausmacht, ist ja in der Romantik keimhaft enthalten: die Entthronung der Vernunft, die Animalisierung des Menschen, die Verherrlichung des Machtgedankens ..."*

Aber ist dies nicht eine furchtbare Anklage gegen eben die Geistesrichtung, der die deutsche Kunst und Literatur ... so ungemaine menschliche Werte verdanken?

Die furchtbare Anklage besteht zu Recht, trotz aller von der Romantik geschaffenen Werte. 'Wir fliegen hoch und sinken umso tiefer! Der entscheidende Charakterzug der deutschesten Geistesbewegung heißt Grenzenlosigkeit' " [5].

Die vor dem Klemperer-Zitat hervorgehobenen emotional-subjektiven Begriffe sind in ihrem Wirken seit langem Betrachtungsobjekte ganz unterschiedlicher Interessensgruppierungen bzw. nichtnaturwissenschaftlicher und nicht-mathematischer Institutionen (im Hochschulbereich unter den Kategorien Sozialwissenschaften, auch "Human"wissenschaften, zusammengefaßt) mit einer schwer überschaubaren Menge an Publikationen, deren Aussagen zeit- und ideologieabhängige Unterschiede aufweisen, auf die hier nicht näher eingegangen wird.

- Die früh erkannte zentrale Bedeutung der Schulbildung hat dem Berufsstand der Lehrer im Verlauf der hier beschriebenen historischen Entwicklung stets eine exponierte Rolle zukommen lassen: Der als längst überwunden geglaubte Vorwurf einer allzu beflissen praktizierten Systemkonformität seitens vieler Vertreter der Lehrerschaft hat u.a. mit der deutschen Wiedervereinigung aktuelle Belebung erfahren. Erneut ein nicht nur im Kreis der seinerzeit Aktiven, die z.T. noch im Berufsleben stehen, sehr unangenehmes Thema, das bei den hier angesprochenen "Schattenseiten" nicht verschwiegen werden darf.
- In hohem Maße subjektiv ist der Einfluß, den Lehrende, selbst Produkte des Bildungssystems ihrer Zeit, von der Unterstufe bis zur Universität, im Guten wie im Bösen auszuüben vermögen: Insbesondere hat der meist literarische Typus des **deutschen Oberlehrers**, der anlässlich beider Weltkriege z.B. mit Schillers Pathos die Begeisterungsfähigkeit neuhumanistisch gebildeter Gymnasiasten anfacht und zum (selbst)zerstörerischen Opfergang verleitet, traurige Berühmtheit erlangt.

Noch vor knapp zwei Jahrzehnten fand die Verpflichtung von Oberschülern, Studenten und Lehrlingen zu mindestens Fragwürdigem, oft genug auch zu Unwürdigem, unter Berufung auf **humanistische Werte** einschließlich der Einforderung vorgeblicher **Pflichten gegenüber dem Vaterland** mit tatkräftiger Schützenhilfe dazu verurteilter, nicht selten aber auch allzu dienstwillig agierender Pädagogen im SED-Staat routinemäßig statt. (Auch der Vaterlandsbegriff, vor allem in seinem oft mißverstandenen Sinn, ist neuhumanistischer Prägung.)

- Die heute noch (bzw. wieder) im Bewußtsein breiter Kreise existierende Vorstellung darüber, was "für die Bildung" charakteristisch ist, aus welchen Bestandteilen sie sich zusammensetzt und wie sie erworben oder erhalten werden kann, ist von den Vertretern der neuhumanistisch-philologischen Seite einengend und nicht ohne Selbstgerechtigkeit zugunsten ihrer klassischen Disziplinen geformt worden ("Annexion des Bildungsbegriffes").

1.2.2 Neue Ideale, neue Helden

Die Idealisierung, Überhöhung und unkritisch-schwärmerische Bewunderung, deren neuhumanistisch-romantische Wurzeln im heutigen Nachrichten- und Bilderüberfluß für die Mehrheit der Rezipierenden kaum erkennbar sind, beziehen sich zunehmend auf Phänomene der Gegenwart: Oft sehr gezielt ins öffentliche Bild gesetzte Ideen, erwünschte Eigenschaften, Prinzipien, Utopien und andere abstrakte Konstruktionen dienen entweder ausschließlich oder mindestens in großen Teilen der Veredlung ("Profilierung") ihrer mit Eifer bemühten Wortführer, die nicht selten die Rolle neuer Helden spielen. Ihre Themen sind nicht mehr die altbekannten, im Totalitären mit viel Resonanz angesprochenen, bewußt unscharf definierten Ideale wie Treue und Ehre, sondern aktuelle Begrifflichkeiten wie z.B. die des **Multikulturellen**, einer nicht näher definierten Völkerverbundenheit, diffus gehaltener **Toleranzein-**forderungen oder des ganzen Komplexes der wissensverweigernd-emotionsbeschwerten **Verdrossenheiten**, besonders gegenüber den sichtbar werdenden Fortschritten von Naturwissenschaften und Technik, wobei sich im Letztgenannten die Gefühlswelt der Romantik deutlich widerspiegelt (Ängste gegenüber der Moderne). Diese Aufzählung läßt sich unschwer erweitern.

1.2.3 Von der Zerbrechlichkeit der Heldenbilder

Die Heldenverehrung in der Art des 18./19. Jahrhunderts mit romantisch überhöhter und idealisierender Verklärung der Idole hat sich – wie zuvor beschrieben – im Wesentlichen bis in unsere Zeit erhalten, nicht nur im schulisch-philologischen Umfeld. Auch in den Medien sind die Helden als gemeinhin untadelig bekannte Figuren der (Zeit)Geschichte mehr oder weniger präsent.

- Aktuelle Tendenzen zur Verdunkelung dieses in schulmeisterlicher Tradition eifrig oft bis ins Intimste ausgeleuchteten Bildes makelloser Lichtgestalten sind jedoch unübersehbar: Abhängig vom Rang des Betroffenen in der publizistischen Wertungsskala und der Qualität der podestverweisenden sensationellen Neuigkeiten darüber, wie der vormalige Held nun "wirklich" war, erfolgt die mediale Reaktion entweder in Form einer symbolischen Hinrichtung mit anschließender Restverwertung auf dem Boulevard oder –

geringstenfalls – mit der demokratisch anmutenden massenbefriedigenden Degradierung des bislang Exponierten in die Reihe der "ganz normalen Zeitgenossen mit jedermanns menschlichen Schwächen", vorbehaltlich der bedarfsweisen Verleihung des Umstrittenheitsetikettes.

- Eine durch den Verlauf der Geschichte meist bestätigte Feststellung bescheinigt der Idealisierung von Menschen, insbesondere von Menschen in Zeitnähe, geringe Glaubwürdigkeit und riskante Realitätsdistanz. Diese Entfernung von der Wirklichkeit ist vom neuhumanistisch-pragmatischen Standpunkt aus ein in Kauf zu nehmender Schönheitsfehler, wenn hehre persönlichkeitsformende Ziele mit dem erhobenen Zeigefinger eines Studienrates verfolgt werden (!).
- Das öffentliche Gebaren, z.B. in den Medien bei zeitbekannten Personen, auch die meist verhalteneren Reaktionen der Fachwelt bei Angehörigen eigener Gruppierungen in den zunehmenden Fällen eines plötzlichen Bekanntwerdens "unpassender" Ereignisse, Umstände oder Verhaltensweisen aus dem Leben der Protagonisten ist geradezu ein Lehrstück dafür, wie mit großem Erfolg dem Bewußtsein der Allgemeinheit heute noch das Idealbild der allseits unbefleckten Heldengestalten unterstellt werden kann: "Irgendwie" spuken die unangreifbaren Marmorfiguren ohne Fehl und Tadel aus Goethes Weimar und Schinkels Berlin weiter in unserem Inneren und geben Anlaß zu Mißverständnissen und Fehldeutungen, manchmal auch zu Schlimmerem.

An dieser Stelle wird ein fundamentaler Unterschied zu Entwicklungsdarstellungen aus mathematisch-naturwissenschaftlicher oder technischer Sicht deutlich, der die subjektiv verklärenden, mit pädagogischen Absichten verwobenen Mythen über allseits "gute" Vorbilder o.ä. praktisch vollständig fehlen. Ganz besonders gilt das für die Mathematik.

2. Exemplarisches in seiner Zeit

2.1 Gottlob Frege – Bildungsbürger im Kaiserreich

Freges Leben (1848 – 1925), sein Werdegang und – für die Nachwelt von besonderem Interesse – seine produktive Zeit als Universitätslehrer und Wissenschaftler, verlief äußerlich in einem überschaubaren geographischen Bereich (Wismar, Bad Kleinen, Jena, auch Göttingen), dessen Schwerpunkt die Universität Jena bildete. Der intellektuelle, politisch-historische, kulturelle und bildungsverbundene Raum, in dem sich dieses Gelehrtenleben vollzog, war hingegen durch außerordentliche Vielschichtigkeit gekennzeichnet: In der Mitte des 19. Jahrhunderts, etwa zu Freges Lebensbeginn, waren es insbesondere die Auswirkungen der mittlerweile etablierten und vom Bürgertum wohl-

akzeptierten preußischen Reformen, deren grundsätzliche Ideen mit geringfügigen Modifikationen in den deutschen Ländern Resonanz fanden, vor allem die zuvor beschriebenen Neuerungen an den Gymnasien und Universitäten; weiterhin gaben der zweigeteilte deutsche Liberalismus, der Konservatismus und der zuvor erwähnte Idealismus den Wertvorstellungen und dem Verhalten der Bildungsbürger ihre Prägung. Diese Situation wurde in den weiteren Jahren, also während Freges Schul- und Studienzeit, überlagert von der sich zuspitzenden preußisch dominierten Einigungsbestrebung, der wachsenden Industrialisierung, dem Beginn der Massenkultur, der Ideen vom Sozialismus, der Sozialdemokratie und dem sich nicht nur in den damaligen deutschen Ländern artikulierenden **Nationalismus** einschließlich des rasseorientierten **Antisemitismus**. Als Gottlob Frege 1873 in Göttingen zum Doktor der Philosophie promoviert wurde, existierte das durch Bismarck "von oben" geschaffene Zweite Deutsche Kaiserreich erst zwei Jahre. Sieben Jahre zuvor, 1866, wurde das Königreich Hannover, dessen geistiges Zentrum die länderübergreifend bedeutende Göttinger Universität war, annulliert und zu einer preußischen Provinz erklärt.

Freges aktive Universitätsjahre als Lehrer und Forscher stimmen mit Beginn und Ende des Deutschen Kaiserreiches überein: 1918, im Jahre seiner Emeritierung als Siebzigjähriger, haben infolge des Weltkriegsdebakels die vier deutschen Könige (an erster Stelle Kaiser Wilhelm II., König von Preußen) und alle anderen Bundesfürsten durch die Novemberereignisse ihre politischen und staatsrepräsentierenden Plätze im nunmehr zur Republik gewordenen Deutschen Reich abrupt verloren.

2.2 Standestypische Verhaltensmuster

2.2.1 Im Kaiserreich

Das neuhumanistische Bildungsideal vor Augen, war es dem Selbstverständnis des deutschen Bildungsbürgertums im 19. Jahrhundert überaus entsprechend, seinen Söhnen den Verbleib auf dieser Standesebene zu ermöglichen (bei den Töchtern verfolgte man diese Absicht bekanntermaßen anderweitig), auch wenn es das oft nur bescheidene elterliche Einkommen bzw. Vermögen kaum zuließ: Die gesellschaftliche ("elitäre") Reputation durch Bildung stand über dem rein materiellen Besitz! Die gelegentlich mit Erstaunen vermerkte Gegebenheit, daß viele Wissenschaftler (z.B. Planck, Born, Pauli, Heisenberg u.a.) Professorensöhne waren, erklärt sich aus diesem Reproduktionsschema.

Sowohl seine Herkunft aus einer Lehrerfamilie als auch sein Lebensverlauf weisen Frege als **typischen Bildungsbürger** aus. Der bildungsbürgerliche Status war für Männer im Regelfall nur durch eigene Leistungen im akademi-

schen (Aus)Bildungsverlauf erreichbar: Freges Werdegang ist auch in diesem Sinn, zumindest bis in sein zweites Universitätsjahr, typisch für einen künftigen Gymnasiallehrer der Mathematik und Physik. Sein Entschluß, diese Laufbahn nicht einzuschlagen, fällt in die Zeit der Trennung des Mathematikstudiums für Lehrer von dem der wissenschaftsorientierten (Voll)Mathematiker.

Bei seiner Entscheidung für eine Universitätslaufbahn mußte Frege um die nicht allein durch eigene Leistungen zu überwindenden Hürden und Unsicherheiten wissen, die den Weg zu einer ordentlichen Professur (Ordinariat) beschwerlich machten. Tatsächlich ist er niemals Ordinarius geworden. Ohne Zweifel gab es bei Frege berechtigten **Stolz auf das in seinem Leben Erreichte**; ob die angeblich damit verbundenen, von Seelenkundigen als starke Antriebskräfte betrachteten **Verlustängste**, die für das Verhalten der Mittelschichten als typisch betrachtet werden, auch Frege befallen haben, bleibt spekulativ. In seinem Privatleben, z.B. bei den Wanderungen, legte er – trotz aller Bescheidenheit im äußeren Erscheinungsbild – durchaus Wert darauf, als Hofrat erkannt zu werden.

Die aus Freges Jenaer Universitätsstellungen als außerordentlicher Professor (seit 1879) bzw. als ordentlicher Honorarprofessor (ab 1896) erzielbaren Einkünfte waren bescheiden und lagen deutlich unter denen der Lehrstuhlinhaber. Aber auch diese ordentlichen Professoren lebten fernab von jedem finanziellen Überfluß. Privates Vermögen, ererbt oder durch Heirat verfügbar, war äußerst willkommen, aber keinesfalls die Regel.

Die oft beschriebene, historisch gesicherte, typische Situation eines "bessergestellten" Hochschullehrerhaushaltes der Kaiserzeit schildert z.B. der Würzburger Chirurgieordinarius Werner Wachsmuth, Sohn des Gründungsrektors der Universität Frankfurt/Main: *"Ich stamme aus einer Professorenfamilie, die in gesicherten materiellen Verhältnissen gut bürgerlich lebte. Fern von jedem Geiz wurde altpreußische Sparsamkeit ganz groß geschrieben. Für den Unterhalt mußten das Gehalt des Vaters und die Vorlesungsgebühren reichen. Schulden wären als unehrenhaft empfunden worden ... Für die Erziehung und Ausbildung der drei Kinder hatte das Geld immer zu reichen, auch wenn sich die Eltern manches versagen mußten. So besuchten wir beiden Brüder das humanistische Gymnasium, die Schwester das Mädchen-Realgymnasium ... Die Prinzipien unserer Erziehung waren Pflichttreue, Leistungswille, Wahrhaftigkeit, Selbstkritik ... Die Verpflichtung gegenüber dem, was Eltern und Vorfahren geleistet haben, denen wir letzten Endes unseren Lebensstandard verdanken, wurde uns nicht als Nötigung auferlegt, sondern entwickelte sich von selbst durch Beispiel, Überlieferung und Ansporn ... Die Werte der Tradition wurden uns auf diese Weise unmittelbar bewußt"* [6].

Besitz und Bildung waren die tragenden Säulen der bürgerlichen Gesellschaft sowohl in der Bismarck-Ära (1871 – 1890) als auch im Wilhelminismus (1890 – 1914/18). Das nichtbesitzende Bildungsbürgertum (etwa ein Prozent

der Bevölkerung) repräsentierte infolge der durch die neuhumanistischen Tradition entstandenen Sonderstellung der akademisch Gebildeten in Deutschland eine dieser systemtragenden Gruppen: "... aus der Zeit Hegels und Humboldts stammt die Ehre, in welcher der 'Gebildete' steht, der reine Theoretiker wie der gelehrte Praktiker, der Philosophieprofessor wie der Chemiker" [7]. Diese gesellschaftlich fest verankerte Anerkennung der Gelehrsamkeit "an sich" stand sehr im Gegensatz zum seinerzeitigen Ansehen von Wissenschaftlern in anderen Ländern, z.B. in den USA, das ausschließlich vom materiellen Gewinn, der aus ihrer Arbeit zu erzielen war, abhing.

Die eindrucksvollen Erfolge deutscher Wissenschaftler in jenen Jahren in fast allen Disziplinen, insbesondere jedoch in Naturwissenschaften, Mathematik und Technik, belegen die **Leistungsfähigkeit der Bildungslandschaft** insgesamt, trotz aller Schattenseiten. (Letztere verkörpern seit ca. 100 Jahren ein offenbar unerschöpfliches Reservoir für einschlägige, oft nicht emotions- oder ideologiefreie Publikationen.)

Die Bildungssituation im kaiserlichen Deutschland vor dem 1. Weltkrieg charakterisiert der US-Historiker David Fromkin in einer neuen Arbeit mit Superlativen:

1.: "... *Motor des deutschen Industriewachstums war das Bildungssystem des Landes ... Es war sehr unwahrscheinlich, dass die gebildetste ... Bevölkerung Europas langfristig ... eine Führungsschicht dulden würde, die sich aus einem sehr kleinen Kreis rekrutierte*" [8], S.76.

2.: "... *'Einsteins Deutschland', wie Fritz Stern es genannt hat, war bereit, die Welt in der Lehre und in den Wissenschaften anzuführen ... Deutsch war die Sprache der Wissenschaft. Wer sich Hoffnungen auf eine Karriere in der Philologie machte, in der Philosophie ... oder in den Naturwissenschaften, war gut beraten, eine deutsche Universität zu besuchen. Die Deutschen waren das wohl kultivierteste Volk auf der Welt*" [8], S.86.

Der im ersten Fromkin-Zitat anklingende politische Hintergrund ist im standes-typischen Erscheinungsbild der deutschen Professoren dieser Zeit meist nur indirekt wahrzunehmen: Der bevorzugt angestrebte **Staatsdienerstatus**, die **vaterländische Haltung** zum spät entstandenen Reich, das **Selbstbewußtsein** des gehobenen Bildungsbürgertums in seiner zunehmend staatstragenden Rolle, die **Ablehnung der Sozialdemokratie** und anderer systemgefährdender Gruppierungen und auch der latent bis manifest vorhandene **Antisemitismus** kennzeichnen in Abstufungen Denkart und Haltung ihrer Mehrheit, wobei im Vordergrund stets die fachliche wissenschaftliche Arbeit bei vorgeblich **fehlendem politischen Interesse** bzw. betonter **politischer Neutralität** steht.

- "Natürlich" konnte ein Sozialdemokrat ..." *nicht mal Physik...an einer preußischen Universität lesen, und daß er gar soziale Wissenschaften lehrte, ist ein ganz undenkbarer Fall ...*" [9].

(Das Zitat bezieht sich auf den damals außergewöhnlichen Vorgang des aus einer jüdischen Berliner Großbürgerfamilie stammenden Physik-Privatdozenten Arons, dem 1900 wegen seiner SPD-Tätigkeit die Universitätslehrerlaubnis entzogen wurde; "Lex Arons".)

- "Natürlich" waren bedeutende Fachgelehrte, auch solche mit hohen menschlichen Qualitäten, in ihrer **konservativen Haltung** zunächst Bedenkenträger gegenüber dem Frauenstudium (in Preußen bis 1908!).

(Hierfür wird oft Max Planck angeführt, bei dem zwar 1899 bereits eine Physikerin promoviert hatte, der Derartiges aber nur in Fällen von Sonderbegabungen akzeptieren wollte.)

Die zuvor angesprochene **Kulturleistung Mathematik** verdient im Zusammenhang mit dem Frauenstudium besonders hervorgehoben zu werden, insbesondere das Engagement von Felix Klein. Sein und David Hilberts Scheitern beim Durchsetzen der Habilitation von Emmy Noether 1915 in Göttingen wirft ein Schlaglicht auf die frauenfeindlich-demütigende Haltung einflußreicher Jünger der Wissenschaft.

- "Natürlich" sahen es die 93 führenden Intellektuellen des Kaiserreiches als **patriotische Pflicht** an, den Aufruf "An die Kulturwelt" vom 4. Oktober 1914 zu unterzeichnen und fast alle Hochschullehrer haben einer adäquaten Erklärung am 23. Oktober 1914 zugestimmt, einige berühmte Namen finden sich auf beiden Schriftstücken; nur eine verschwindende Minderheit um Albert Einstein lehnte die Identifikation von Kultur und Geist mit dem Militärischen und dem Propagandistischen kompromißlos ab.

"Natürlich" findet sich auch **Gottlob Frege** auf dieser Liste von über 3000 Unterschriften, darunter F. Klein, Hilbert, G. Cantor, E. Schmidt, Dedekind, Planck, von Laue, O. Hahn und viele andere Prominente. Von besonderer Tragik zeugt es für spätere Betrachter, ausgerechnet auf diesen "vaterländischen" Listen einer bedeutenden Anzahl der Persönlichkeiten zu begegnen, die ab 1933 von den Nazis vertrieben, verfolgt bzw. verfemt wurden: Fritz Haber, James Frank, Max Born, Felix Hausdorff, aber auch Künstler wie Max Reinhardt oder den Altmeister der deutschen Moderne, Max Liebermann, um nur ganz wenige zu nennen.

Die Widersprüche zwischen Humboldts neuhumanistischen sowie anderen Idealen und den tages- sowie systembedingten politischen Niederungen, die entweder mit **Überzeugung** oder infolge eines auf unterschiedlichste Weise wirkenden **Anpassungsdruckes** durchschritten werden müssen, wenn die Tätigkeitsliquidation als Alternative ausgeschlossen wird, sind damals wie heute nur selten befriedigend auflösbar.

2.2.2 Nach dem Kaiserreich

Die lebensbegleitende relative Sicherheit, die das deutsche Kaiserreich sowohl dem Bildungsbürgertum als auch den anderen bessergestellten Bevölkerungsschichten bot, fiel mit dessen Ende im November 1918 übergangslos fort. Überzeugungen und Wertvorstellungen der generationenprägenden vier Friedensjahrzehnte im geeinten Reich wurden nichtig, der nicht ohne Entbehrungen errungene materielle Besitz, im Falle "vaterländischer Treue" in Kriegsanleihen investiert, ging sofort verloren, anderenfalls wenige Jahre später. Nichts habe das deutsche Bürgertum so für Hitler reif gemacht wie die Inflation von 1919 bis 1923, schrieb Stefan Zweig. Dem Bürgertum hatte die neue Ordnung kaum etwas Erstrebenswertes zu bieten: *"Nie ist die Republik den Verdacht ganz losgeworden, ein Staat auf Abruf zu sein. Schon ihre Entstehung aus einer unvermuteten Niederlage mitsamt dem moralischen Verdikt über das besiegte Land hat ihr die innere Zustimmung großer Teile der Bevölkerung vorenthalten. Der Abstand wuchs noch angesichts der bürgerkriegsähnlichen Zustände ... [und] führte über die Inflation von 1923 mit der Verarmung der staatstreuen Mittelschichten zu weiterer Entfremdung ..."* [10].

"Besonders verbeamtete Akademiker, aber auch freie Berufe wie Anwälte und Ärzte schienen die neue Gesellschaftsordnung als soziale Degradierung zu erleben: 'Der typische Akademiker blieb völkisch und antisemitisch, ein Feind der Republik' ... Mit dem sozialen Aufstieg der Juden wurde der Antisemitismus gesellschaftsfähig" [11].

"Sogar kultivierte Physiker wie Planck und Sommerfeld waren keine Freunde Weimars und der – wie sie meinten – dieser Republik zuzuschreibenden Auflösung der Kultur und der öffentlichen Ordnung. Unter den Konservativen blühte der Antisemitismus; allerdings war das in den Wissenschaftlergemeinschaften anderer Länder, einschließlich der Vereinigten Staaten, nicht anders" [12].

- Von **Arnold Sommerfeld** ist die Passage eines Briefes an einen Kollegen vom Frühjahr 1919 überliefert, in dem er (Sommerfeld) auf Grund des *"jüdisch-politischen Unfugs mehr und mehr Antisemit"* werde [13]. So befremdlich derartige Aussagen heute auch wirken, es wäre historisch falsch und menschlich in hohem Maße ungerecht, mit dem Wissen der jetzigen Generationen über das Unfaßbare, was gerade dem Antisemitismus später unter dem Naziregime entwuchs, fast 90 Jahre rückwirkend Vorwürfe zu erheben oder Schuldsprüche zu fällen: Sommerfeld, einer der führenden Vertreter der Theoretischen Physik in Deutschland und Begründer der Münchener Theoretikerschule, war in seinem Wirken als hochangesehener

akademischer Lehrer und Institutsdirektor frei von jedem rassistischen Vorurteil und hat sich während der braunen Diktatur für seine zahlreichen jüdischen Schüler persönlich eingesetzt und ihnen durch seine weltweiten wissenschaftlichen Verbindungen wirksam geholfen.

Seine zuvor zitierte Äußerung ist als **standestypische Reaktion** der deutschen Gelehrten zu verstehen, die – wie das Bürgertum insgesamt – schon während der Kaiserzeit, besonders aber nach dem 1. Weltkrieg, ihre tragenden traditionellen Werte durch die **Moderne** bedroht sahen, in deren Gefolge die Lebensumbrüche Demokratie und Kollektivismus bereits ihre befürchteten Wirkungen zu entfalten im Begriff waren. Mit der Moderne wurden die Juden gleichgesetzt: *"In der Tat verkörperten und propagierten die Juden stärker als jede andere Gruppe die Moderne ... Gleichwohl war der Antisemitismus nicht Ursprung, sondern Metapher der deutschen Angst vor der Moderne"* [14].

- Die 1994 entdeckten Tagebuchnotizen von **Gottlob Frege**, 1924, ein Jahr vor seinem Tod notiert, fallen in ihren antisemitischen und "völkisch"-nationalen Tönen, in denen Hitler bereits als Hoffnungsträger erscheint [15], paßgerecht in das zuvor beschriebene charakteristische Verhalten. Dieser späte intime Blick auf seine Reflexionen gibt die latent vorhandenen, nach Fachdisziplin, Persönlichkeit und verspürter Veranlassung unterschiedlich aggressiv nach außen getragenen oder für sich behaltenen Denk- und Empfindungsmuster der meisten bürgerlich-konservativen Gelehrten seiner Zeit wieder; er zeigt, daß Frege auch hierbei der standestypischen Art entsprach: **Herausragend, zeitüberdauernd und "revolutionär" sind ausschließlich seine wissenschaftlichen Leistungen!**
- Der Nobelpreisträger **Max Planck**, Entdecker des nach ihm benannten Wirkungsquantums und renommiertester deutscher Physiker in diesen Jahren, konnte nur mit Mühe das allgemeine Wahlrecht der Weimarer Republik akzeptieren. Er verglich die Politik mit der Wissenschaft – zu beidem benötige man Sachverstand, den er den Massen der Bevölkerung nicht zutraute (!) [16].
- Der ungewöhnlich und vielseitig begabte **Werner Heisenberg**, aus bildungs-bürgerlichem Hause, der sich bereits als Abiturient ein mathematisches Wissen auf Forschungsniveau erarbeitet hatte, ging als 18-jähriger Freiwilliger 1919 in ein gegen die Münchener Räterepublik operierendes Freikorps. Heisenberg, Nobelpreisträger von 1932, entwickelte sich zu einem der vielseitigsten Physiker des 20. Jahrhunderts.

Die vier aufgeführten Beispiele stehen exemplarisch für eine lange Liste hochrangiger deutscher Forscher und akademischer Lehrer, deren *"Sympathie für das untergegangene Kaiserreich ... geistiger, patriotischer, sozialer, kultureller, moralischer Natur [war] - alles, nur nicht [Sympathie für] das verab-*

scheute 'politische' Verhalten, das die Verteidiger der Weimarer Republik an den Tag legten" [17]. Ihre selbstverständene apolitische Haltung hinderte sie trotz der für die neue Ordnung empfundenen Verachtung nicht daran, ihren Dienst mit preußischer Pflichterfüllung zu versehen. Joachim C. Fest spricht in diesem Zusammenhang von dem " ... Dilemma eines auf seine Teilgebiete spezialisierten wissenschaftlichen Geistes, der ohne einen Begriff vom eigenen gesellschaftlichen Ort, in einem Zustand politischer Unmündigkeit verharrete, sondern auch [von der] ... umfassende[n] Sinn – und Lebensverfehlung eines bürgerlichen Bildungsideals, das angeblich 'unpolitisch', in Wahrheit aber immer obrigkeitstreu, autoritätsverpflichtet und behördenfromm mit der Staatsmacht zu paktieren gewohnt war" [18].

2.2.3 Ein heutiger Blick

Wenn heute Schulen, Straßen, wissenschaftliche Institutionen oder Auszeichnungen und Preise auch mit den Namen der zuvor genannten oder anderer Persönlichkeiten aus den hier betrachteten Wissenschaften bezeichnet werden, erhalten bei gegebenen Anlässen die angesprochenen altbekannten Verhaltensmuster im jeweilig konkreten Fall immer wieder scheinbaren Neuigkeitswert: **Die längst erfolgte strikte Distanzierung der Fachwelt von den Schattenseiten ihrer Helden sollte verbindlich zur Kenntnis genommen werden**, so z.B. von manchen begeisterungswilligen Heimatforschern, von den vorbildsuchenden Pädagogen, denen romantisch-idealisierte Elemente nach wie vor nicht fremd sind, von bemühten Lokalpolitikern, denen es um eine intellektuelle Aufwertung ihrer "Region" geht, vor allem aber – mit deutlichem Abstand zu den eben genannten Gruppen guten Willens – auch von den **unergiebig Bemühten**, denen es nicht um Forscher, Erfinder, Naturwissenschaft, Mathematik, Medizin oder Technik geht, sondern um auffällige Zurschaustellungen vermeintlich neuer Sachverhalte, die – ideologiebehaftet und skandalträchtig – zum späten Zerbrechen bürgerlicher Persönlichkeiten, deren Profil, Format und Bedeutung sich diesen Akteuren ohnehin schwerlich erschlossen hat, also zum Sturz der Helden in der bereits beschriebenen Weise geeignet erscheinen.

Freilich ist hierbei anzumerken, daß sich der Sturm auf "Denkmäler und Helden" gegenwärtig nicht nur auf die Exponenten der hier relevanten Disziplinen beschränkt, sondern eine generelle Tendenz systematisch betriebenen Autoritätsabbaus widerspiegelt.

Es bleibt festzustellen: Naturwissenschaftler, Mediziner, Techniker und Mathematiker, die heute als Namensgeber im deutschen öffentlichen Raum präsent sind, haben trotz ihrer skizzierten Dunkelseiten **unvergleichlich bedeutendere und zeitübergreifendere Leistungen für die Allgemeinheit erbracht und mehr bleibende Verdienste erworben** als viele Vertreter aus

ganz anderen Sphären, deren Namen neuerdings und nach wie vor z.B. Straßen, Plätze und (Hoch)Schulen bezeichnen: Man findet Figuren aus der Propaganda und Marionetten aus dem politisch-bürokratischen Apparat der zweiten deutschen Diktatur, fragwürdige Barden unterschiedlichster Künste, dubiose "Sowjet"helden (!), Aktivisten der Studentenunruhen von 1968 u.a.m.; ein Blick in Stadtpläne bzw. in die Listen von (Kunst)Hochschulen und Gymnasien einiger deutscher Länder gibt hierüber beredt Auskunft.

3. Neuere Tendenzen

3.1 In der allgemeinen Öffentlichkeit

"Autoritätsverlust der Erwachsenen, Statusgewinn der Kinder" heißt der Untertitel einer vor Jahresfrist erschienenen pädagogischen Monographie. Unabhängig von deren Inhalt verführt der hier anstehende Kontext zu einer Transformation dieses Titels etwa in die folgende pointierte These:

Die gezielt veranlaßte Beschädigung etablierter Vor- und Leitbilder der bürgerlichen Gesellschaft ist ein Gewinn, eine eigenleistungsfreie Aufwertung für die anonyme Mehrheit der Bevölkerung.

Diese These gleicht geradezu einer Handlungsanweisung, nach der mit deutlichen Erfolgsaussichten erneut im schon total ausgeforscht geglaubten Dunstkreis der Großen aus Kultur- und Geisteswelt agiert werden kann. Neben sensationell aufgemachten Meldungen, die vor allem der Profilierung ihrer Urheber dienen sollen, finden sich gekonnt geschriebene Werke mit literarischen Qualitäten, frei erfundene Geschichten minderer Güte und quasidokumentarisch Geschildertes einschließlich ihrer Umsetzungen in Funk und Fernsehen bzw. anderen Medien. Eine längst überfällige Demokratisierung als Wegbereiter für die angestrebte wissenschafts"mündige" Gesellschaft oder die zu Unrecht im Schatten ihrer berühmten Männer stehenden Frauen, die vorgebliche Unbekanntheit bedeutender Köpfe aus Wissenschaft und Gesellschaft des 19. Jahrhunderts bei der heutigen Leserschaft und ähnliche Beweggründe werden bei der Einführung dieser zum Teil durchaus lesenswerten Arbeiten als Motive genannt. Tatsächlich bewirken sie – bestenfalls nur als Nebenresultat – im Kulturverständnis der Leser, bei denen zum Wenigsten (neu)humanistische Wertungsfähigkeiten vorauszusetzen sind, eine **Beschädigung bzw. das Zerbrechen der Heldenbilder**; so beispielsweise bei Goethe: Sigrid Damm beschreibt Goethes Verhalten zu seiner langjährigen Geliebten und späteren Ehefrau als äußerst schäbig und zeichnet insgesamt ein kritisches Bild des Dichterfürsten ("Christiane und Goethe", 1999),

bei Schiller: Die Autorin Baur stellt Schiller als fragwürdige Figur in den krassesten Farben dar, geradezu als Zerrbild dessen, was im "klassischen" Literaturunterricht substantiell dazu ausgeführt wird ("Mein Geschöpf musst du sein", 2004),
 oder bei Gauß: Der Autor Kehlmann schildert in einem Roman frei erfundene Details über Gauß und A. v. Humboldt in "oft lustvoller Klassikerschändung" mit Grenzüberschreitungen zur Karikatur[19]. Die teilweise heftigen Kritiken von kompetenter Seite (Mathematik und Geschichte) verschwinden unter dem Gewicht des leichtlebig-literarischen Massenerfolges dieses Buches praktisch vollständig (!).

Die alte Erkenntnis, daß sensationell "aufgemachte" Nachrichten oder Neuigkeiten stets ihr Publikum finden, ist für Autoren und Redakteure einer Vielzahl konkurrierender Medien zur universellen Vorgehensmaxime geworden, wie die neben den wenig erfreulichen Tagessensationen zunehmenden Meldungen über Persönlichkeiten der (Zeit)Geschichte belegen, in denen überraschende Neuigkeiten (vorwiegend negativen, zumindest aber befremdlichen Charakters) der Öffentlichkeit dargeboten werden. Wie in den o.a. Beispielen zur Belletristik erfolgen hier neben der Schaffung und Befriedigung von Neugierde zwangsläufig auch **Autoritätsabbau, Denkmalsturz oder Beschädigungen**:

- Der Freiburger Germanist Rüdiger Scholz wirft Goethe im Zusammenhang mit der Hinrichtung einer Kindsmörderin 1783 schwere Menschenrechtsverletzungen vor und fordert die Umbenennung der weltweit etablierten Goetheinstitute.
- Das idealisiert-verklärte Bild über Albert Einstein erfuhr in den Augen amerikanischer (Sozial)Forscherinnen einen tiefen Sturz ins Gewöhnliche, nachdem sie dessen in seiner Jugend geschriebenen Liebesbriefe "analysiert" und für trivial befunden hatten. Dieser Sachverhalt war es ihnen wert, als Sensation lautstark mit dem Tenor der Enttäuschung publiziert zu werden (!).
- Die öffentliche Demontage seiner bereits zu einem Denkmal bzw. zu einem Heldenbild stilisierten Person mußte der mit hohen Ehren ausgezeichnete Autor Grass nach dem späten Bekanntwerden seiner SS-Angehörigkeit zur Kenntnis nehmen; ähnliche aktuelle Beispiele geringerer Resonanz sind fast regelmäßig auf den Feuilletonseiten zu finden.

Solche Vorgänge erscheinen geeignet, Begründungen für die Vorstöße selbsternannter Reformpädagogen zu liefern, die beispielsweise einen "Deutschunterricht ohne Goethe" und andere Absurditäten fordern. Abgesehen davon, daß

derartige Ansinnen allen Intentionen so profunder Kenner der Weimarer Klassik wie denen der fachwissenschaftlich hochqualifizierten Autorin Sigrid Damm und anderer widersprechen, stecken hinter diesen extremen Bestrebungen in der Regel vordergründig-handfeste **ideologische Haltungen**, wie das Beispiel Grass besonders deutlich zeigt. Von ideologisch-kulturellen Anschauungen und Standorten abhängig, dienen die Sachverhalte dieser und vieler weiterer Beispiele im öffentlichen Raum ganz unterschiedlichen Absichten und Argumentationen, allerdings sind **Autoritätsverluste** durch Betonung der Schattenseiten bei den betrachteten Persönlichkeiten hierbei meist unübersehbare Elemente: "Genieverehrung ist steril und altmodisch"; der oft als Paradebeispiel eines einsamen Genies angesehene Albert Einstein wird von dem Harvard-Historiker Peter Galison auf ganz andere Weise in Frage gestellt als in dem o.a. skurrilen Beispiel – auch spielen irgendwelche Schattenseiten in Einsteins Person, die es natürlich gibt, bei Galison keine Rolle [20] .

3.2 In fachspezifischen Räumen

Auch die weitaus geringer in der medienbestimmten Öffentlichkeit als der zuvor angesprochene Personenkreis stehenden (zeit)geschichtlich bedeutenden **Vertreter der Wissenschaft** unterliegen der skizzierten Tendenz zur kritischen Ausleuchtung ihres gesamten Erscheinungsbildes, wobei die gerechte Berücksichtigung der oft schwierigen Zeitumstände ihrer Lebensepochen und die mögliche Beschädigung ihres bislang meist untadeligen Bildes nicht unabhängig vom ideologischen Zuschnitt ihrer heutigen Berichtersteller sind. Insbesondere bilden Umfeld, Situation und Verhalten deutscher Wissenschaftler und Techniker im historischen Raum beider Weltkriege ein nach wie vor ergiebiges Reservoir an Stoff für ernsthafte historische Untersuchungen, seriöse wissenschaftsjournalistische Darstellungen einschließlich belletristischer Anknüpfungen, aber auch für einseitige, von Vorurteilen und gefühlsmäßigen Abneigungen geprägte Publikationen. Für die Akteure der letztgenannten Kategorie sind die bewährten Rezepte, Aufmerksamkeit und Profilerfolg durch **lautstark-provokante Thesen** zu erlangen, fraglos nicht abschreckend oder motivationshemmend, vgl. u.a. [12], [17].

Es ist an dieser Stelle ausdrücklich zu betonen, daß sowohl die **Suche nach bisher Unbekanntem** in den oft wenig vollständigen Biographien verstorbener Persönlichkeiten als auch deren Auswertung von **wissenschaftlichem Interesse** sind und **grundsätzliche Legitimität** besitzen! Die dabei möglicherweise gefundenen neuen Erkenntnisse und Details berühren jedoch kaum die meist lückenlos bekannte wissenschaftliche Substanz, das anerkannte Lebenswerk, auf Grund dessen alle weiteren Ausforschungen der Person erst von Interesse geworden sind, sondern sie geben vor allem zusätzliche Anhalts-

punkte über den Menschen in seiner Zeit: **Offensichtlich unterscheiden sich hierbei Naturwissenschaften, Mathematik, Medizin und Technik prinzipiell von anderen Disziplinen, in denen die Trennung von Mensch und Werk aus den verschiedensten Gründen nicht möglich oder unerwünscht ist:** Ob es persönlichkeitsprägende Obsessionen, Schwermut, Depressionen oder ähnliche Verfassungen sind, die z.B. den Physiker wie den Literaten in gleicher Weise befallen können, sie beeinflussen bei dem einen – möglicherweise sehr einschneidend – die Randbedingungen oder die Quantität seines Schaffens, bei dem anderen den Inhalt, die Qualität selbst.

Analysen des komplizierten inneren Ergehens der Menschen, also auch aller Vertreter aus Wissenschaft und Gesellschaft, einschließlich möglicherweise erkennbarer Wechselwirkungen mit ihren Leistungen, führen zu einem Spezialgebiet, das hier nicht einmal im Ansatz angesprochen werden kann; die sogenannten Pathographien bekannter Personen lassen die Undurchsichtigkeit und Fragwürdigkeit dieser Materie erkennen, vgl. z.B. [21].

- Neue Erkenntnisse aus dem Leben und dem Umfeld längst etablierter verstorbener Pioniere der exakten Wissenschaften, Medizin und Technik erregen vor allem die Aufmerksamkeit von **Vertretern geistes- und sozialwissenschaftlicher Zweige**, wenn von dem Sonderinteresse infolge fachwissenschaftlicher oder persönlicher Verbundenheit (z.B. bei Schülern, Nachfolgern u.a.) einmal abgesehen wird.
- Gegenüberstellungen der zum Allgemeingut gehörenden, von der Wissenschaft akzeptierten und erprobten Ergebnisse, Verfahren, Theorien und Methoden mit den Erkenntnissen über das politische, soziale oder anderweitige (Fehl)Verhalten ihrer Urheber in der Absicht, Neubewertungen zu initiieren, **bewirken neben dem geplanten Sturz der Heldendenkmäler in der zuvor beschriebenen Weise notwendig die Infragestellung der wissenschaftlichen Leistungen und Ideen, insbesondere in der breiten fachfremden Öffentlichkeit.** Zudem drängen sich hierbei **Erinnerungen an dunkle Zeiten** auf:
 - Das ständige Mißtrauen der Machthaber gegenüber der eigenen Bevölkerung, ihre (grundsätzlich zutreffende) Unterstellung, daß diese "nicht mit dem Herzen dabei" sei und die unwürdigen Methoden, möglichst auch die innersten Regungen und Gedanken der Menschen auszuforschen, um sie danach zu kategorisieren, waren ein kennzeichnendes Merkmal der SED-Herrschaft.
 - Als z.B. die Negierung der Relativitätstheorie durch die Bewegung der "Deutschen Physik" während der NS-Diktatur auf Dauer weder in der Hochschullehre noch in der physikalischen Forschung aufrechtzuerhalten war, versuchte man einen Balanceakt, der die Lehre des physikalischen Inhaltes und seine Anwendungen zuließ, den Namen Einstein jedoch ver-

schwieg und die Entstehung der Erkenntnisse verschleierte. Ein diskriminierender Kompromiß, mit dem sich das Regime auch in dieser Situation entlarvte.

- Auch heute ist das Ansehen geachteter führender Vertreter der Wissenschaft, deren Lebensführung, Werk und andere Verdienste weltweit Anerkennung gefunden haben, vor **bewußt arrangierten Beschädigungen** nicht sicher, die von nachgeborenen Autoren aus ideologischen oder anderen Motiven offenbar bedenkenlos herbeigeführt werden, wie Astrid von Pufendorf in [16] nachweist: Im Jahre 2004 wird in einer Buchveröffentlichung eine 1933 gehaltene Rede des damaligen Präsidenten der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft, Max Planck, eines Gelehrten von Weltruf, bürgerlich und konservativ im besten positiven Sinn, durch **gezielt lückenhaftes Zitieren** in so sinnentstellender Weise wiedergegeben, um damit die **politisch willkommene These** zu untermauern, nach der eine "positive Identifikation" der seinerzeitigen Wissenschaftsgesellschaft mit den Zielen des Hitlerkabinetts bestanden habe. Eine historische Unwahrheit! "Sie wollen die Idole entlarven, die letzten Götter stürzen, sie entdecken: Die dunkle Seite des Genies ..." [22].
- Daß Gottlob Frege auch Gegenstand neuerer ideologisch begründeter Abwertungsstrategien ist, erscheint nach dem Bekanntwerden seiner Tagebuchaufzeichnungen zwangsläufig, allein infolge der hier bereits angesprochenen, im äußersten Maß distanzerzwingenden Aussagen. Fachspezifischer Art ist jedoch der Verdacht bzw. die Unterstellung, daß Freges diesbezügliche Notizen als Ausdruck einer Geisteshaltung oder Weltanschauung zu verstehen wären, deren Wurzeln in besonderer Weise mit dem **mathematischen bzw. philosophischen Entwurf seiner Logik** gekoppelt sein könnten [23]. Eine hervorhebenswert falsche Mutmaßung: *"Es gab eine Zeit, besonders vom 17. bis zum 19. Jahrhundert, in der man annahm, die Logik drücke die Gesetze des Denkens aus. Die meisten Logiker ... stimmen darin überein, daß dies keine gute Beschreibung der Logik ist. Die Logik umfaßt sicher nicht die empirischen Gesetze unseres tatsächlichen Denkens ... Im Gegenteil können wir sagen, daß die Logik niemals als Regelsystem erfunden worden wäre, wenn logisches Denken das übliche wäre. Mathematiker wissen sehr wohl, daß selbst der Weg zum Finden einer mathematischen Wahrheit durchaus keine geradlinige Anwendung der Logik ist; der Mathematiker braucht die Logik, um Einsichten zu prüfen, die er nicht durch Logik, sondern durch Intuition gefunden hat"* [24].

"Der (Natur)Wissenschaftler unterliegt trotz seines spezialisierten Wissens in seiner eigenen Disziplin in anderen Dingen ebenso den dunklen Kräften wie jeder andere auch. Zwar mögen ihm Ausbildung und Erziehung helfen, einige seiner irrationalen Triebe zu überwinden, aber das Bild vom objekti-

ven kühlen, über der Menge stehenden Wissenschaftler ist trügerisch. Darüber sollten sich die Wissenschaftler selbst als auch die breite Öffentlichkeit im klaren sein" [25].

3.3 Einschränkungen und Fehldeutungen

- Das "Hauptfach Mathematik" mit seinem hohen Stellenwert im neuhumanistischen Gymnasium des frühen 19. Jahrhunderts hat nachweislich zum vielgerühmten Erfolg dieser Institution beigetragen. Die wissenschaftlichen Leistungen, die zur knapp ein Jahrhundert andauernden weltweiten Spitzenstellung Deutschlands in Mathematik und Naturwissenschaften führten, wurden fast ausnahmslos von Absolventen dieser Gymnasien erbracht! Es wurde jedoch bereits im Verlauf des 19. Jahrhundert erkennbar, daß über die Jahrzehnte eine Deformation des Verständnisses für die kulturtragende Funktion der Mathematik erfolgte, die insbesondere von der klassisch-philologisch, literarisch-geisteswissenschaftlich bzw. politisch-soziologisch o.ä. orientierten Seite betrieben und für sich entschieden wurde. Diese geistige Situation prägt bis in die Jetztzeit die deutsche Bildungslandschaft, trotz gegenteiliger Verlautbarungen der Verantwortungsträger unterschiedlichster Ebenen. Von interessierter Seite regelmäßig publikumswirksam aufgefrischt, fällt die negativ besetzte Mystifizierung der Mathematik und der Naturwissenschaften als "hinterfragbare"(!) Elemente der (Allgemein)Bildung auf den fruchtbaren Boden einer diesbezüglich von vielen Medien eingestimmten, aber keineswegs ernsthaft-überzeugend unterrichteten breiten Öffentlichkeit. Politiker, Leinwand-, Sport- oder sonstige Tageshelden ernten Sympathie und große Zustimmung, wenn sie völlige Unkenntnis in den o.a. Disziplinen offenbaren, im gleichen Atemzug aber selbstbewußt ihre vermeintlich bedeutende Rolle in der Gesellschaft herausstellen, zu deren erfolgreicher Wahrnehmung "diese Dinge überhaupt nicht erforderlich sind", wie nun jedermann sicher zu erkennen glaubt ...
- Zur bereits erwähnten "Annexion des Bildungsbegriffes" ist das nachstehende Beispiel besonders aufschlußreich: Der Konstanzer Wissenschaftshistoriker Ernst-Peter Fischer weist in auf den Erfolgsautor Schwanitz hin, der als ehemaliger Literaturprofessor 1999 in einem vielverkauften, in der Öffentlichkeit seither beinahe den Ruf "des Standardwerkes" genießenden umfangreichen Buch über die Bildung ausdrücklich naturwissenschaftliche Kenntnisse als nicht zur Bildung gehörend und "wenig zum Verständnis der Kultur" beitragend abqualifiziert. Warum dann allerdings z.B. die Relativitätstheorie Eingang in dieses Buch gefunden hat (die in irrelevanter Weise völlig verkannt dort angesprochen wird), bleibt das Geheimnis des inzwischen verstorbenen Bildungsfachmannes, der auch den Kulturbegriff für sich und seinesgleichen reserviert hatte.

- In ähnlicher Weise wie die einseitige Inanspruchnahme des Bildungsbegriffes erfährt seit geraumer Zeit der insbesondere in den Naturwissenschaften, speziell in der Physik und ihren enger angegliederten Zweigen, z.B. der Theoretischen Chemie, der Theoretischen Elektrotechnik u.a., mit hohen Ansprüchen besetzte Begriff "**Theorie**" einen **inflationären Gebrauch**: Kultur"theorie", Friedens-, Roman-, Architektur-, Medien- und viele weitere sogenannte Theorien haben mit Aufwertungsabsichten Eingang in die entsprechenden Fachsprachen gefunden. Allen ist gemeinsam, daß bei ihnen lediglich die vielfältigen Beobachtungen und Erscheinungen systematisiert erfaßt und – wenn das überhaupt möglich ist – vereinheitlicht beschrieben werden. *"Natürlich sind Darstellungen dieser Art wichtig ..., aber sie erklären nichts aus sich heraus und vermögen deshalb gerade nicht, was eine Theorie der Physik kann. Eine Relativitätstheorie ist unendlich weit von einer Medientheorie entfernt, und zu den Bildungsmängeln unserer Gesellschaft gehört, dass sie wissenschaftliche Theorien mit der gleichen Elle bewertet wie ihre weniger entwickelten Schwestern"* [26].
- Trotz der zuvor angesprochenen Verdrängung von Mathematik und Naturwissenschaften aus dem Wertekatalog meinungsbildender Philologen hat "das Gymnasium" unter den verschiedensten Schwierigkeiten zu allen Zeiten befähigte und leistungswillige Studienanwärter auch für diese Fächer herangebildet; in einer Betrachtung über mathematikbezogene heutige Befindlichkeiten kann aber ein dazu konträres Thema nicht ausgeklammert werden: Den in unterschiedlichsten Variationen existierenden Vorurteilen, negativen Erfahrungen, erworbenen Ängsten und Abneigungen gegenüber der Mathematik und den Naturwissenschaften, insbesondere bei der (Schul)Jugend, aber nicht auf diese beschränkt, entgegenzuwirken und für die Ausbildung Brauchbares und Ausbaufähiges in einer dieser ernststen Situationen angemessenen, auch künftigen Bedürfnissen entsprechenden Weise zu vermitteln, ist als bildungspolitische Notwendigkeit eingängig zu fordern; in der Bildungspraxis ist dies hingegen nur durch schrittweises Überwinden vieler unterschiedlich gearteter Einzelschwierigkeiten erreichbar. Das ist ein altbekanntes wie aktuelles Problem mit tiefgestaffeltem Hintergrund, in dessen Räumen sich u.a. auch viele Aktivitäten des **Gottlob-Frege-Zentrums** entfalten.

3.4 Ein Blick auf andere Möglichkeiten

Als weitere Standorte zunehmend wichtig für das **Mathematikstudium** und die mathematische Forschung wurden die deutschen **Technischen Hochschulen**, die sich nach dem 1. Weltkrieg vermehrt den Grundlagenwissenschaften öffneten. Die noch im Kaiserreich (1899) erreichte Gleichstellung der TH mit den Universitäten, die Bestrebungen der sogenannten Ingenieurbewegung un-

ter Alois Riedler, aber auch Felix Kleins ähnliche Bemühungen auf der Universitätsseite um die Akademisierung der Technik ermöglichten **andere Bildungswege**, vor allem **neben dem Neuhumanismus** (Oberrealschulen, Realgymnasien; die nichtlateinischen Doktorgrade "Dr.-Ing." bzw. "Dr.-Ing. E.h." wurden zu Markenzeichen des höchsten TH-Abschlusses bzw. der höchsten Ehrung, verliehen durch eine TH).

3.5 Abschließende Bemerkungen

- Bei der hier vorliegenden Betrachtung zum "**Hauptfach Mathematik**", beginnend mit dem Werdegang von C. F. Gauß, über den Neuhumanismus bis in die 1920er Jahre, dabei Gottlob Frege als typische Gelehrtenfigur seiner Zeit im Blickfeld, konnte **nicht im Mindesten Vollständigkeit** angestrebt werden. Der Neuhumanismus mit seinen charakteristischen Erscheinungen, von denen vieles in den Grundzügen auch die weiteren Systemwechsel bis heute überdauert hat, stellt die Leitlinie dar sowohl für die großen, weltweit anerkannten Erfolge als auch für die durch Kriege und Diktaturen, insbesondere durch die damit verbundenen Ideologien verursachten Niedergänge des deutschen Bildungswesens. Freilich spielen Ideologien auch in der heutigen Bildungslandschaft und in anderen Bereichen nicht unwesentliche Rollen!
- Für die Mathematik gilt in gleicher Weise, was der legendäre Göttinger Experimentalphysik-Ordinarius Robert Wichard Pohl (1884–1976) anlässlich der 21.(!) Auflage seines berühmten Werkes "Elektrizitätslehre" im Jahre 1974, nach seinem 90. Geburtstag, im Vorwort anmerkte: "*In der Physik ist, anders als heute in manchen 'Wissenschaften', kein wortreiches Gerede erforderlich*" [27]. Dem ist nichts hinzuzufügen.

Literatur (Auswahl)

1. Reichardt, H. (Herausgeber): C. F. Gauß – Gedenkband anlässlich des 100. Todestages, Leipzig 1957
2. Schwinges, R. Ch. (Herausgeber): Humboldt International, Basel 2001
3. Eckert, M.: Die Atomphysiker, Braunschweig/Wiesbaden 1993; dort so zitiert
4. Fauvel, J. u.a. (Herausgeber): Möbius und sein Band, Basel; Boston; Berlin 1994
5. Klemperer, V.: LTI, Halle (Saale) 1957
6. Pörtner, R. (Herausgeber): Kindheit im Kaiserreich, Augsburg 1998
7. Mann, G.: Deutsche Geschichte des 19. und 20. Jahrhunderts, Frankfurt am Main 1992
8. Fromkin, D.: Europas letzter Sommer, München 2005
9. Glatzer, R.: Das Wilhelminische Berlin, Berlin 1997
10. Fest, J.: Staatsstreich, Berlin 1994
11. Neubauer, H. (Herausgeber): Die Weimarer Zeit, Köln 2000
12. Cornwell, J.: Forschen für den Führer, Bergisch Gladbach 2003

13. Walker, M.: Die Uranmaschine, Berlin 1990
14. Seligmann, R.: Hitler – Die Deutschen und ihr Führer, München 2004
15. Bollenbeck, G.: Tradition, Avantgarde, Reaktion, Frankfurt am Main 1999
16. von Pufendorf, A.: Die Plancks, Berlin 2007
17. Rose, P. L.: Heisenberg und das Atombombenprojekt der Nazis, Zürich 2001
18. Fest, J. C.: Das Gesicht des Dritten Reiches, München 1996
19. Heine, M.: Die Vermessung der Welt, Rezension, Welt online, 28. Sept. 2008
20. Galison, P.: Einsteins Uhren, Poincarés Karten, Frankfurt am Main 2003
21. Lange-Eichbaum, W.; Kurth, W.: Genie, Irrsinn und Ruhm, München/Basel 1967/1979
22. zitiert nach W. Winkler: "Die Zeit", 16. 09. 1988, im Zusammenhang mit einem Kult"musiker
23. Engler, W.: Pathologische Vernunft, "Die Zeit", 05/1995
24. von Weizsäcker, C. F.: Die Tragweite der Wissenschaft, Stuttgart 1990
25. Segrè, E.: Die großen Physiker und ihre Entdeckungen, München/Zürich 1997
26. Fischer, E. P.: Die andere Bildung, Berlin 2003
27. Pohl, R. W.: Elektrizitätslehre, 21. Auflage, Berlin/Heidelberg/New York 1975

Autor

Prof. Dr.-Ing. Heinz-Helmut Bernd

Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Gottlob-Frege-Zentrum

Hochschule Wismar

Philipp-Müller-Str. 14

D-23966 Wismar

E-Mail: heinz-helmut.bernd@hs-wismar.de

Gottlob Frege – Kurzbiographie

08.11. 1848	geboren in Wismar (Mecklenburg)
Okt. 54 – Ostern 69	Besuch der Großen Stadtschule in Wismar
1869 – 1873	Studium der Mathematik in Jena und Göttingen
1873	Promotion mit der Arbeit „Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene“ in Göttingen
1874	Habilitation mit der Arbeit „Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Größenbegriffsgründen“ in Jena, Privatdozent
1874 – 1918	Lehrtätigkeit in Jena
1879	„Begriffsschrift – eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens“, Halle (Saale)
02.08. 1879	Verpflichtung als außerordentlicher Professor für Mathematik
1884	„Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl“, Breslau
1893	„Grundgesetze der Arithmetik“, Band I, Jena
14.03. 1887	Heirat mit Margarete Lieseberg (1856 – 1904)
26.05. 1896	Ernennung zum ordentlichen Honorarprofessor
21.12. 1903	Ernennung zum Großherzoglich-Sächsischen Hofrat
1903	„Grundgesetze der Arithmetik“, Band II, Jena
1905	Tod der Ehefrau Margarete Frege
1908	Vormund von Alfred (*1903) und Toni (*1905) Fuchs, später Adoption von Alfred
1918	Übersiedlung nach Bad Kleinen
08. 12. 1918	Emeritierung
1924	„Politisches Tagebuch“ ¹
26. 07. 1925	gestorben in Bad Kleinen (auf dem Grabkreuz in Wismar: 28.7. 1925)

¹ Frege war in seinen späten Jahren Monarchist. In seinem nicht zur Veröffentlichung bestimmten Tagebuch machte er unter anderem die Sozialdemokraten für den verlorenen Krieg verantwortlich und äußerte antisemitische Gedanken (siehe „Gottlob Freges politisches Tagebuch“. Herausgegeben von G. Gabriel und W. Kienzler. In: Deutsche Zeitschrift für Philosophie 42, 1994, 1057-1066).

WFR - Wismarer Frege-Reihe / Wismar Frege Series

- Heft 01/2005 Proceedings Workshop Mathematik für Ingenieure, Bremen, Oktober 2005.
- Heft 01/2006 Känguru-Wettbewerb, Aufgaben und Lösungen, Wismar, März 2006.
- Heft 02/2006 Bertram Kienzle: Der Ursprung der modernen Logik und Semantik bei Gottlob Frege, Juni 2006.
- Heft 03/2006 Wanderungen zu Ehren von Gottlob Frege – Ein Resümee nach 20 Jahren, November 2006.
- Heft 04/2006 Diethardt Röthel: Zukunftsprojekt Schulschach – Gehirnjogging, Aufgaben und Lösungen, Dezember 2006.
- Heft 05/2006 Proceedings 5. Workshop Mathematik für Ingenieure, Wismar, Teile 1 – 3, September 2006.
- Heft 01/2007 Proceedings Minisymposium Moderne Mathematikausbildung für Ingenieure, Humboldt-Universität Berlin, Teile 1 – 2, März 2007.
- Heft 02/2007 Mathematik für Ingenieure – Thesen zum Jahr der Mathematik 2008, Dezember 2007. / Mathematics for Engineers – Theses to the Year of Mathematics 2008, December 2007.
- Heft 01/2008 Gottlob Frege – Leistungen und Wirkungen, Frege-Kolloquium zum Hochschuljubiläum, Juni 2008.
- Heft 02/2008 Heinz-Helmut Bernd: Hauptfach Mathematik. Über Neuhumanismus, Wertewandel und heutige Befindlichkeiten. Gottlob Frege – Bildungsbürger im Systemwechsel, November 2008.
- Heft 03/2008 Proceedings 6. Workshop Mathematik für Ingenieure, Soest, Teile 1 – 2, September 2008.
- Heft 04/2008 Proceedings Minisymposium Moderne Mathematikausbildung für Ingenieure, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Teile 1 – 2, September 2008.
- Heft 01/2009 Gottlob Frege – Mathematiker, Logiker und Philosoph, Sonderheft für Frege-Preisträger, Juli 2009.

Vertrieb

Hochschule Wismar Service GmbH
Philipp-Müller-Str. 14
D - 23966 Wismar
Telefon: ++49 / (0)3841 / 753 574
Fax: ++49 / (0)3841 / 753 575
E-mail: info@hws.hs-wismar.de

ISSN 1862-1767